المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة الطائف
إدارة النشر العلمي



الديناميكا

د/سيد عبد الفتاح زكي
د/ السيد عبد الخالق محمد
د/ السيد محمد أبو الدهب

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة الطائف
إدارة النشر العلمى



الديناميكا

إعداد

د/ سيد عبد الفتاح زكي السيد
قسم الرياضيات و الاحصاء-كلية العلوم-جامعة الطائف

د/ السيد عبد الخالق محمد | **د/ السيد محمد أبو دهب**
قسم الرياضيات و الأحصاء - كلية العلوم - جامعة الطائف

مراجعة

أ.د/ عبد المعطي محمد عبدالله | أ.د/ محمد محمد علي أحمد
قسم الرياضيات و الأحصاء- كلية العلوم- جامعة الطائف

٢٠١٢م- ١٤٣٣هـ

الديناميكا

د/سيد عبد الفتاح زكي السيد
د/السيد عبد الخالق محمد، د/ السيد محمد أبو دهب
مراجعة :أ.د/عبد المعطي محمد عبدالله ، أ.د/محمد محمد علي أحمد



الطبعة الأولى: ١٤٣٣هـ/٢٠١٢م

جامعة الطائف - الحوية

رمز بريدي: ٢١٩٧٤

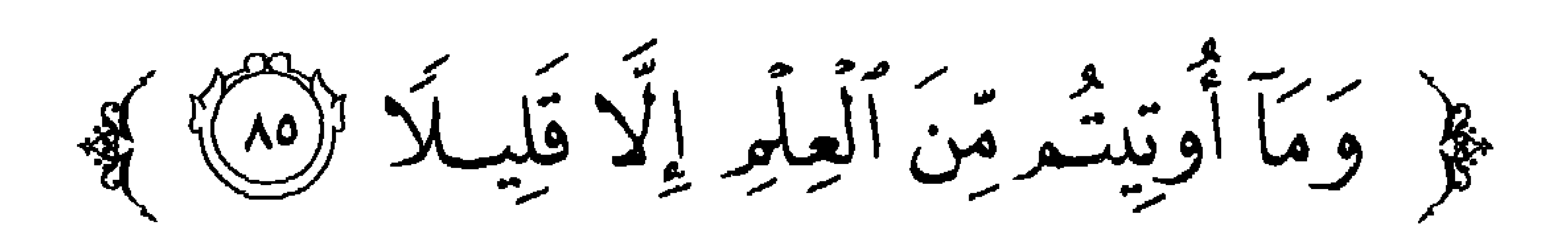
المملكة العربية السعودية

(ح) جامعة الطائف ١٤٣٢هـ
فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية اثناء النشر
السيد ، سيد عبد الفتاح
الديناميكا / سيد عبد الفتاح السيد، السيد عبد الخالق محمد،
السيد محمد أبو دهب، عبد المعطي محمد عبدالله، محمد محمد أحمد
- الطائف ، ١٤٣٣هـ
٢١٥ ص: ١٧,٥×٢٥سم
ردمك: ١-٠٩-٨١١٥-٦٠٣-٩٧٨
١- الحركة الحرارية أ. العنوان
ديوي ٥٣٦,٧ ١٤٣٣/٤٤٥٥
رقم الإيداع: ١٤٣٣/٤٤٥٥
ردمك: ١-٠٩-٨١١٥-٦٠٣-٩٧٨
التصميم المعلوماتى والجرافيكى د / مجدى حسين


بسم الله الرحمن الرحيم

قَالَ تَعَالَىٰ:

أَعُوذُ بِٱللَّهِ مِنَ ٱلشَّيْطَٰنِ ٱلرَّجِيمِ



الإسراء : ٨٥

تقديم :

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد النبي الأمي الأمين عليه وعلى آله وأصحابه أجمعين.

تم بحمد الله و توفيقه إعداد هذا الكتاب ليتوافق مع تطلعات الجامعة في البحث العلمي، التأليف، والنشر بما يفيد أبنائنا الطلاب وبناتنا الطالبات ليكون معينا لهم في الدراسة والبحث العلمي، وفريق العمل يتقدم بخالص الشكر والتقدير لإدارة الجامعة وخاصة إدارة النشر العلمي في تعاونهم لمساعدة الطلاب والطالبات، وأيضاَ يخص بالشكر لرئيس قسم الرياضيات لتذليله الصعاب أمام الفريق لإخراج هذا الكتاب لحيز النور، كما يتقدم أعضاء الفريق بخالص الشكر والتقدير إلي جميع أعضاء هيئة التدريس بالقسم ويخص بالشكر الدكتور/ قطب عبد الحميد محمود بما قدمه من دعم واستشارات في مجال النشر العلمي.

و أخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

و الله الموفق

لجنة الإعداد

مقدمه :

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد النبي الأمي الأمين عليه وعلى آله وأصحابه أجمعين.

علم الرياضيات التطبيقية من العلوم الأساسية في عصرنا الحاضر وهي فرع أصيل ومهم من فروع الرياضيات وهذا العلم يعرف بعلم الفيزياء النظرية ويتفرع منه الديناميكا الكلاسيكية التي تعتبر الفرع الأقدم في علم حركة الأجسام وهي تهتم بدراسة القوى المؤثرة على الجسم وحركته ونظم الجسيمات في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد ومحاولة صياغة تلك العلاقات في قوانين فيزيائية تسمح باستنتاج سير الحركة المستقبلية على أساس معرفة الشروط الابتدائية، ومصطلح الميكانيكا الكلاسيكية للدلالة على المنظومات الرياضية التي أرسى مبادئها العالم "إسحاق نيوتن" و"يوهانز كبلر" و"جاليليو" والتي ظلت سائدة من القرن السابع عشر حتى ظهرت النسبية الخاصة التي صاغها العلامة "ألبرت اينشتين" خلال الفترة من ١٩٠٥مـ إلى ١٩١٦مـ، و ميكانيكا الكم التي أشترك في صياغتها ماكس بلانك و هيزنبرك و شرودنجر و ديراك في بداية القرن العشرين بين ١٩٠٠مـ–١٩٢٨مـ، و في البداية كانت الميكانيكا النيوتنية تهتم بصفة أساسية بتفسير حركة الكواكب و الأجسام على الأرض بواسطة أساليب التحليل الرياضي و لا سميا الحساب التفاضلي التي وضعها نيوتن نفسه بالتوازي مع "لايبنتز"، و فيما بعد قام كل من "لاجرانج" و "هاملتون" بإعادة صياغة وتبسيط حسابات الميكانيكا وذلك بالاعتماد على أن حركة الجسم تخضع لوجود حد أدنى من الطاقة الكامنة دون اللجوء إلى توازن القوى والتسارع (قانون نيوتن الثاني)، كما تدخل النظريات الخاصة بتأثير الحرارة على الغازات والأجسام والمعروفة بالديناميكا الحرارية. ومن العاملين في هذا المضمار "بويل" و"بولتزمان" وكذلك صياغة نظرية الكهرومغناطيسية على يد ماكسويل كلها تنتسب إلى الميكانيكا التقليدية تنجح في وصف حركة الأجسام عند السرعات البطيئة بالنسبة إلى سرعة الضوء وتبلغ سرعة الضوء ٣٠٠ كيلو/ ثانية أما إذا أقتربت سرعة الجسم من سرعة الضوء، فيجب الحساب باستخدام النظرية النسبية حتى لا تحدث فروق بين الحساب

والمشاهدة إذا اتبعنا طريقة نيوتن – كذلك لا تأخذ الديناميكا الكلاسيكية التأثيرات الكمية في الحسبان و تلك التأثيرات الكمية لابد من أخذها في الاعتبار عند دراستنا لخواص المادة وحركتها في الحيز المجهري أي عند تعاملنا مع الجسيمات الذرية و تحت الذرية.

وتعتبر الميكانيكا الكلاسيكية أداة العديد من التطبيقات التقنية الحديثة مثل الهندسة المدينة والملاحة الفضائية.

ويتألف الكتاب من ستة فصول؛ الفصل الأول يتناول الحركة في وسط مقاوم، حيث حركة الأجسام في الأوساط المختلفة التي تواجه نوعا من المقاومة تعمل على تقليل حركته لذلك تؤخذ مقاومة الوسط في الاعتبار، أما الفصل الثاني يعالج الحركة التوافقية المخمدة والمجبرة، ويهتم الفصل الثالث بالحركة في خط مستقيم عندما تتغير الكتلة، والفصل الرابع يناقش الحركة المقيدة، بينما يستعرض الفصل الخامس حركة الأجسام تحت تأثير القوى المركزية وقوانين كبلر التي تحكم حركة الكواكب في النظام الشمسي، والفصل السادس يهتم بالحركة العامة للجسم الجاسئ (المتماسك) ويستعرض أيضا عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام، و يُذيل الكتاب بالمرجع المهمة المستخدمة في الكتاب التي تفيد القارئ.

والله من وراء القصد ويهدي إلى السبيل.

لجنة الإعداد

قائمـة

الفهــارس

فهرس المحتوى

المحتويات	الصفحة
تقديم	v
مقدمة	vi
قائمة الفهارس	ix
فهرس المحتوى	xi
الفصل الأول: الحركة في وسط مقاوم	١
مقدمة	٣
١/١- دراسة حركة الجسيم وهو صاعد	٤
٢/١- دراسة حركة الجسيم وهو هابط	٥
٣/١- أمثلة	٥
٤/١- تمارين	٢٠
الفصل الثاني: الحركة التوافقية	**٢٣**
١/٢- الحركة التوافقية المخمدة	٢٥
٢/٢- الذبذبات المجبرة (القسرية)	٢٨
٣/٢- الذبذبات المخمدة المجبرة	٣٠
٤/٢- أمثلة	٣٢
٥/٢- تمارين	٤١
الفصل الثالث: الحركة في خط مستقيم عندما تتغير الكتلة	**٤٣**
مقدمة	٤٥
١/٣- استنتاج معادلة حركة جسيم متغير الكتلة	٤٥
٢/٣-أمثلة	٤٧
٣/٣- تمارين	٦١
الفصل الرابع: الحركة المقيدة	**٦٥**

مقدمة ٦٧
٤/١- مركبات السرعة والعجلة ٦٧
٤/١/١- مركبات السرعة ٦٧
٤/١/٢- مركبات العجلة ٦٨
٤/٢- بعض العلاقات الهندسية التفاضلية ٦٩
٤/٢/١- العلاقة بين المسافة القوسية والإحداثيات الكارتيزية ٦٩
٤/٢/٢- نصف قطر التقوس إذا علمت معادلة المنحنى الذاتية ٧٠
٤/٢/٣- نصف قطر التقوس إذا علمت معادلة المنحنى الكارتيزية ٧١
٤/٣- أمثلة ٧١
٤/٤- مبدأ الشغل و الطاقة ٧٥
٤/٤/١- القوة ثابتة أثناء الحركة ٧٥
٤/٤/٢- القوة متغيرة أثناء الحركة ٧٦
٤/٥- أمثلة ٧٧
٤/٦- قاعدة الشغل والطاقة للحركة المستوية ٧٩
٤/٧- طاقة الوضع ٨٠
٤/٨- مبدأ ثبوت الطاقة ٨٠
٤/٩- أمثلة ٨١
٤/١٠- المجالات المحافظة ٨٣
٤/١١- الحركة العامة في دائرة رأسية ٨٥
٤/١١/١- مركبات العجلة ٨٦
٤/١١/٢- دراسة حركة جسيم يتحرك من الخارج على سلك دائري أملس مستواه رأس ٨٦
٤/١١/٣- دراسة حركة جسيم داخل أنبوبة دقيقة دائرية في مستوى رأسي...... ٨٨
٤/١٢- أمثلة ٩٠
٤/١٣- الحركة على منحنى السيكلويد (الدويري) ٩٤

٤/١٣/١- المعادلات البارامترية لمنحنى السيكلويد ٩٤
٤/١٣/٢- المعادلة الذاتية للسيكلويد ٩٥
٤/١٤- أمثلة ٩٧
٤/١٥- تمارين ١٠٣

الفصل الخامس: المسارات المركزية ١٠٥

مقدمة ١٠٧
٥/١- تعريف ١٠٧
٥/٢- دراسة الحركة ١٠٧
٥/٣- أمثلة ١١٠
٥/٤- المعنى الطبيعي للثابت h ١١٥
٥/٥- تعيين الزمن اللازم لقطع جزء من المسار المركزي ١١٧
٥/٦- أمثلة ١١٧
٥/٧- القبا (الأبس) والأبعاد القبوية ١٢٢
٥/٨- نتائج ١٢٤
٥/٩- أمثلة ١٢٥
٥/١٠- قوانين كيبلر لحركة الكواكب ١٣٦
٥/١١ - أمثلة ١٣٧
٥/١٢- تمارين ١٤٠

الفصل السادس: الحركة المستوية للجسم الجاسئ (المتماسك)............ ١٤٣

٦/١- تعريف الجسم الجاسئ ١٤٥
٦/٢-الحركة المستوية للجسم الجاسئ (المتماسك) ١٤٥
٦/٢/١- أنواع الحركة المستوية ١٤٥
٦/٢/٢- الحركة الانتقالية ١٤٥
٦/٢/٣- معادلات الحركة الانتقالية ١٤٥
٦/٢/٤- الحركة الدورانية ١٤٦

٦/٢/٥- كمية الحركة الدورانية ١٤٧
٦/٢/٦- معادلة الحركة الدورانية ١٤٧
٦/٢/٧- طاقة الحركة الدورانية ١٤٨
٦/٣- عزم القصور الذاتي ١٤٩
٦/٤- نظرية المحاور المتعامدة ١٥٠
٦/٥- أمثلة ١٥١
٦/٦- نظرية المحاور المتوازية ١٦٣
٦/٧- حاصل ضرب القصور الذاتي ١٦٤
٦/٨- نظرية المحاور المائلة ١٦٥
٦/٩- أمثلة ١٦٧
٦/١٠- قطع ناقص القصور الذاتي ١٦٨
٦/١١- أمثلة ١٧٠
٦/١٢- حركة جسم جاسئ (متماسك) على مستوى خشن ١٧٥
٦/١٣- أمثلة ١٧٦
٦/١٤- التدحرج والانزلاق ١٨٢
٦/١٤/١- حالة الانزلاق ١٨٢
٦/١٤/٢- حالة التدحرج ١٨٣
٦/١٥- أمثلة ١٨٤
٦/١٦- البندول المركب ١٩٤
٦/١٧- تمارين ١٩٨
قائمة المراجع ٢٠١
أولاً : المراجع العربية ٢٠٣
ثانياً : المراجع الأجنبية ٢٠٤
دليل المصطلحات العلمية ٢٠٥

الفصل الأول

الحركة في وسط مقاوم

Motion in a resisting medium

مقدمه :

إذا تحرك جسم في وسط ما فإن الجسم يواجه نوعاً من المقاومة تعمل على تقليل حركته، وفي بعض الحالات تكون المقاومة صغيرة بحيث يمكن إهمالها بالنسبة لغيرها من القوى الأخرى، وفي حالات أخرى يكون للمقاومة تأثير واضح على الحركة وفي هذه الحالة لا يمكن إهمال المقاومة وأمثلة على ذلك حركة الطائرات في الهواء، وحركة البواخر في المياه وأيضاً حركة المقذوفات في الهواء، وهذه المقاومة هي صورة من صور انتقال الطاقة حيث تتحول من طاقة حركية إلى طاقة حرارية في الوسط المحيط وتعرف المقاومة بأنها قوى مبددة. والمقاومة قوة لذلك فهي كمية متجهة لها مقدار واتجاه ويكون اتجاهها دائما عكس اتجاه الحركة، أما المقدار فهويعتمد على خواص الجسم من حيث الشغل والحجم ومساحة المقطع وسرعته كما يعتمد المقدار أيضا على خواص الوسط من حيث الكثافة واللزوجة وقابليته للانضغاط.

ونأخذ المقاومة هنا تعتمد على السرعة على الصورة التالية :

$$R = -\lambda v^n$$

حيث λ ثابت ويعتمد مقداره على خواص الجسم والوسط، n يختلف مقداره بمدى اختلاف السرعة، ونعرف الحالات التالية

١. إذا كانت $n = 0$ فإن المقاومة تكون ثابتة مثال ذلك المقاومة الاحتكاكية بين الأجسام الصلبة الجافة،
٢. إذا كانت $n = 1$ فإن هذه المقاومة تكون لحركة الجسيمات الكروية الصغيرة في وسط مقاوم مثل الماء والهواء،
٣. إذا كانت $n = 2$ فإن هذه المقاومة تكون لحركة الأجسام القصيرة غير الانسيابية،
٤. إذا كانت $n > 2$ فإن هذه المقاومة تظهر في حالة حركة الاجسام التي تتحرك بسرعة تكاد تقترب من سرعة الصوت وتعرف هذه الظاهرة بظاهرة الحاجز الصوتي، وسوف لانتعرض لهذه الحالة لشدة صعوبتها وتعقيدها في إيجاد الحل في هذه المرحلة،

والقانون المناسب لحالات الحركة في وسط مقاوم هونيوتن الثاني وتكون معادلة الحركة على الصورة

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \bar{R}$$

حيث m كتلة الجسيم، $\bar{v}$ سرعته، $\bar{F}$ محصلة القوى المؤثرة علي الجسيم و $\bar{R}$ قوة المقاومة، وعند دراسة حركة الجسيم الرأسية في وسط مقاوم تحت القوة التالية:

١. وزن الجسيم mg ويؤثر رأسياً إلي أسفل.
٢. قوة المقاومة $R(v)$ واتجاه حركتها عكس اتجاه حركة الجسيم شكل(١-١)

ونتبع الخطوات التالية:



١. نختار نقطة القذف كنقطة أصل تقاس منها الإزاحة،
٢. نعين الموضع اللحظي للجسم،
٣. نكتب معادلة الحركة حسب قانون نيوتن الثاني على النحو التالي:

شكل (١-١)

١/١- دراسة الجسيم وهو صاعد :

معادلة حركة الجسيم عند اللحظة t وهو على ارتفاع y أنظر شكل (١-١) هي

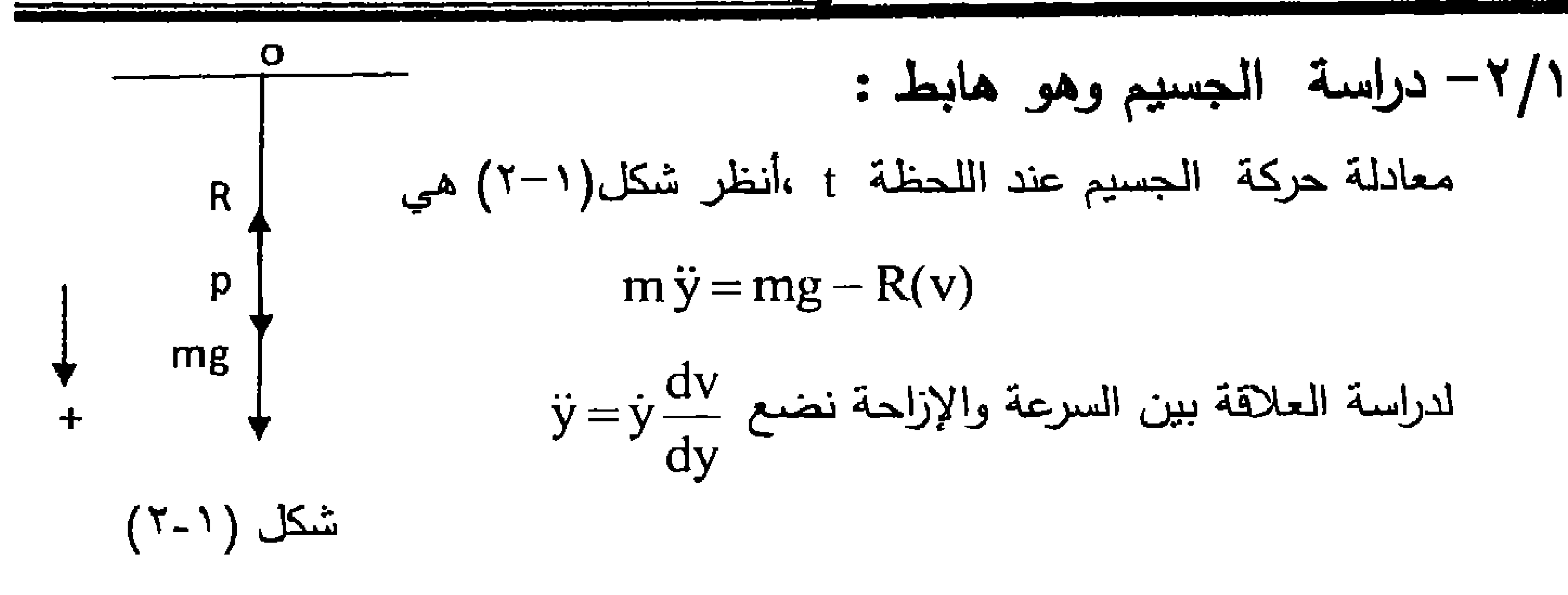
$$m\ddot{y} = -mg - R(v)$$

لدراسة العلاقة بين السرعة والزمن نضع $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$

وبالتعويض في معادلة الحركة وبفصل المتغيرات والتكامل نوجد العلاقة بين السرعة والزمن ويكون زمن أقصى ارتفاع عندما يسكن الجسيم لحظياً، ولدراسة العلاقة بين السرعة والإزاحة نضع $\ddot{y} = v\frac{dv}{dy}$

وبالتعويض في معادلة الحركة وبفصل المتغيرات والتكامل نوجد العلاقة بين السرعة والإزاحة ويكون أقصى ارتفاع يصل الجسيم إليه عندما يسكن الجسيم لحظياً.

١/٢- دراسة الجسيم وهو هابط :



معادلة حركة الجسيم عند اللحظة t ،أنظر شكل(١-٢) هي

$$m\ddot{y} = mg - R(v)$$

لدراسة العلاقة بين السرعة والإزاحة نضع $\ddot{y} = \dot{y}\dfrac{dv}{dy}$

شكل (١-٢)

وبالتعويض في معادلة الحركة وإجراء التكامل وتعيين ثابت التكامل نحصل على العلاقة بين السرعة والإزاحة، أيضا لدراسة العلاقة بين السرعة والزمن نضع

$$y = \frac{dv}{dt}$$

في معادلة الحركة وبفصل المتغيرات وإجراء التكامل وتعيين ثابت التكامل من الشروط الابتدائية نحصل على العلاقة بين السرعة والزمن.

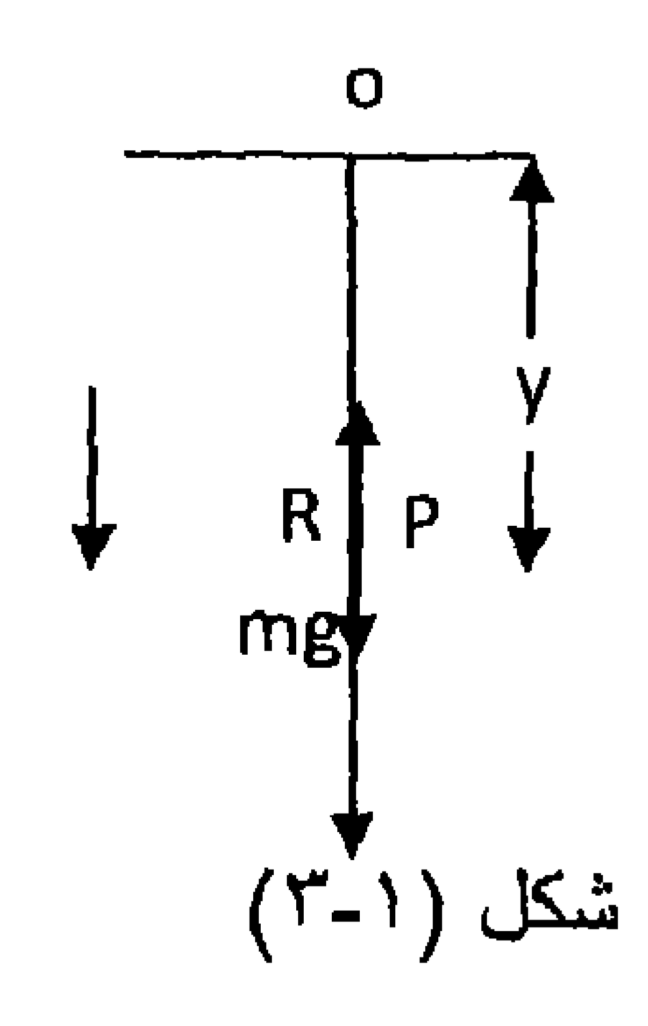
وفي هذه الحالة نلاحظ الطرف الأيمن من معادلة الحركة يتناقص باستمرار لأن v تتزايد مع مرور الزمن بينما g ثابتة، وعلى ذلك فبعد زمن معين تصل قيمة $R(v)$ إلى القيمة العددية للمقدار mg وعندئذ تتلاشى $\ddot{y}$ فتتحرك النقطة المادية بسرعة ثابتة، وهذه السرعة الثابتة تسمى بالسرعة القصوى وهي قيمة

السرعة عندما تنعدم العجلة، وإذا رمزنا للسرعة القصوى بالرمز v_1 ونحصل عليها بوضع $\ddot{y} = 0$ و $v = v_1$ في معادلة الحركة نحصل على قيمة v_1 وسوف نستعرض فيما يلي لبعض الأمثلة المختلفة التي توضح ذلك.

١/٣- أمثلة :

مثال (١): تسقط نقطة مادية من سكون في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة فإذا علم أن v_1 هي السرعة النهائية في هذا الوسط ، فأثبت أن الجسيم يتحرك بسرعة $\frac{1}{2}v_1$ بعد زمن قدره $\frac{v_1}{g}\ln 2$. ويكون قد تحرك مسافة $\frac{v_1^2}{2g}(2\ln 2 - 1)$.

الحل :



شكل (١-٣)

بفرض أن نقطة بدء الحركة o نقطة أصل ونفرض أن النقطة المادية وصلت إلى الموضع p وعلى بعد y من o وسرعتها v بعد زمن قدره t ،

القوى المؤثرة على النقطة المادية :

١. mg وزن النقطة المادية راسيا إلي أسفل حيث m كتلة النقطة المادية،

٢. قوة المقاومة رأسيا إلى أعلى ولتكن $\lambda m v$ حيث v سرعتها عند اللحظة t و λ ثابت التناسب، أنظر شكل(١-٣) ،

معادلة الحركة عند اللحظة t هي:

$$m\ddot{y} = mg - \lambda mv$$

ومنها نجد أن

$$\ddot{y} = \lambda\left(\frac{g}{\lambda} - v\right) \qquad (1)$$

ولإيجاد السرعة النهائية نضع $v = v_1$ في (1) عندما $\ddot{y} = 0$ نجد أن

$$v_1 = \frac{g}{\lambda} \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$\ddot{y} = \lambda\left(v_1 - v\right) \qquad (3)$$

١- دراسة العلاقة بين السرعة والزمن :

نضع $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$ في (3) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dv}{v_1 - v} = \lambda \int dt$$

ومنها نجد أن

$$-\ln(v_1 - v) = \lambda t + c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية، حيث عند $t = 0$ كانت $v = 0$ ومن (4) نجد أن $c_1 = -\ln v_1$

وبالتعويض عن ثابت التكامل في (4) نجد أن

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{v_1}{v_1 - v} \qquad (5)$$

وعند $t = \frac{v_1}{g} \ln 2$ ومن (5) نجد أن $\frac{v_1}{g} \ln 2 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{v_1}{v_1 - v}$

وبالتعويض عن λ من (2) وحل المعادلة الأخيرة في v نحصل على $v = \frac{1}{2} v_1$

أي أن بعد زمن قدره $\frac{v_1}{g} \ln 2$ تتحرك النقطة المادية بالسرعة $v = \frac{1}{2} v_1$، وهو المطلوب أولاً.

٢- دراسة العلاقة بين السرعة والإزاحة :

نضع $\ddot{y} = \dot{y} \frac{dv}{dy}$ في المعادلة (3) وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل علي

$$-v - v_1 \ln(v_1 - v) = \lambda y + c_2$$

حيث c_2 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية، حيث عند $t = 0$ كان $v = 0$ و $y = 0$ فإن $c_2 = -v_1 \ln v_1$ بالتعويض عن c_2 نجد أن

$$y = \frac{1}{\lambda}\left(-v + v_1 \ln \frac{v_1}{v_1 - v}\right) \qquad (6)$$

وعند $v = \frac{1}{2} v_1$

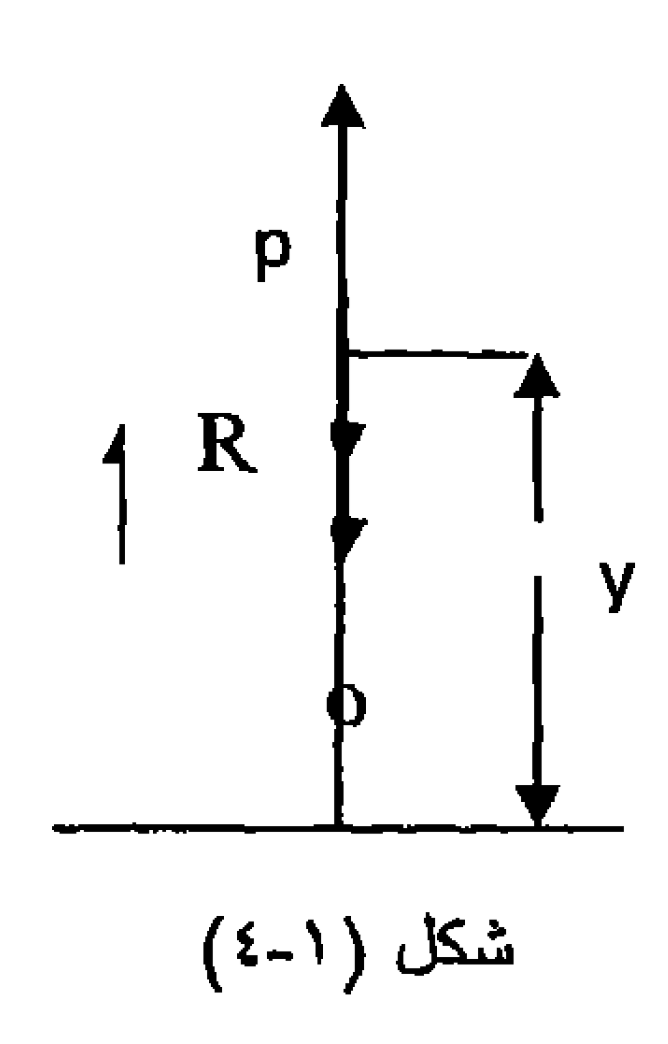
$$y = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{2} v_1 + v_1 \ln \frac{v_1}{v_1 - 0.5 v_1}\right) \qquad (7)$$

وبالتعويض من (2) في (7) نحصل على $y = \frac{v_1^2}{2g}(2 \ln 2 - 1)$

أي أن الجسيم قد تحرك مسافة $y = \frac{v_1^2}{2g}(2 \ln 2 - 1)$ بعد زمن قدره $\frac{v_1}{g} \ln 2$ من بدء الحركة.

مثال (٢): قذفت نقطة مادية كتلتها m بسرعة قدرها $2v_1$ رأسياً إلى أعلى في وسط مقاومته تساوي حاصل ضرب الكتلة m مع مربع سرعة النقطة المادية. فإذا كانت v_1 هي السرعة النهائية للنقطة المادية وهي هابطة في هذا الوسط ، فأثبت أن أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم هو $\frac{1}{2} \ln 5$ ، وأثبت كذلك أن هذا الارتفاع يستلزم زمناً قدره $\frac{1}{v_1} \tan^{-1} 2$.

الحل :



شكل (١-٤)

بفرض أن نقطة بدء الحركة o نقطة أصل ونفرض أن النقطة وصلت إلى الموضع p وعلى بعد y من o وسرعتها v بعد زمن قدره t

القوى المؤثرة على الجسيم :

١. mg وزن الجسيم راسيا إلي أسفل حيث m كتلة النقطة المادية،

٢. قوة المقاومة R رأسيا إلى أسفل وتساوي mv^2 حيث v سرعتها عند اللحظة t ، كما في الشكل (١–٤) فإن

معادلة الحركة عند اللحظة t هي:

$$m\ddot{y} = -mg - m\,v^2$$

ومنها نجد أن

$$\ddot{y} = -\left(g + v^2\right) \qquad (1)$$

ولإيجاد السرعة النهائية ندرس الجسيم وهوهابط حيث معادلة حركته عند اللحظة t هي

$$\ddot{y} = g - v^2 \qquad (2)$$

بوضع $v = v_1$ عند $\ddot{y} = 0$ في المعادلة (2) نجد أن السرعة النهائية هي v_1 حيث

$$v_1 = \sqrt{g} \qquad (3)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$\ddot{y} = -\,(v_1^2 + v^2) \qquad (4)$$

١– العلاقة بين السرعة والإزاحة :

من المعادلة (4) بوضع $\ddot{y} = \dot{y}\dfrac{dv}{dy} = v\dfrac{dv}{dy}$ وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{v\,dv}{v_1^2 + v^2} = -\int dy$$ ومنها نجد أن

$$\frac{1}{2}\ln(v_1^2 + v^2) = -\,y + c_1 \qquad (5)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية حيث عند $t = 0$ كانت $v = 2v_1$ نستنتج أن $c_1 = \frac{1}{2}\ln 5v_1^2$

بالتعويض عن ثابت التكامل c_1 في المعادلة (5) نحصل على

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{5v_1^2}{v_1^2 + v^2} \qquad (6)$$

عند أقصى ارتفاع H تنعدم السرعة أي $v = 0$ تكون $y = H$ وبالتعويض في المعادلة (6) نحصل على $H = \frac{1}{2}\ln 5$ وهو المطلوب أولاً

٢- العلاقة بين السرعة والزمن :

من المعادلة (4) بوضع $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$ وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int\frac{dv}{v_1^2 + v^2} = -\int dt$$

ومنها نجد أن

$$\frac{1}{v_1}\tan^{-1}\frac{v}{v_1} = -t + c_2 \qquad (7)$$

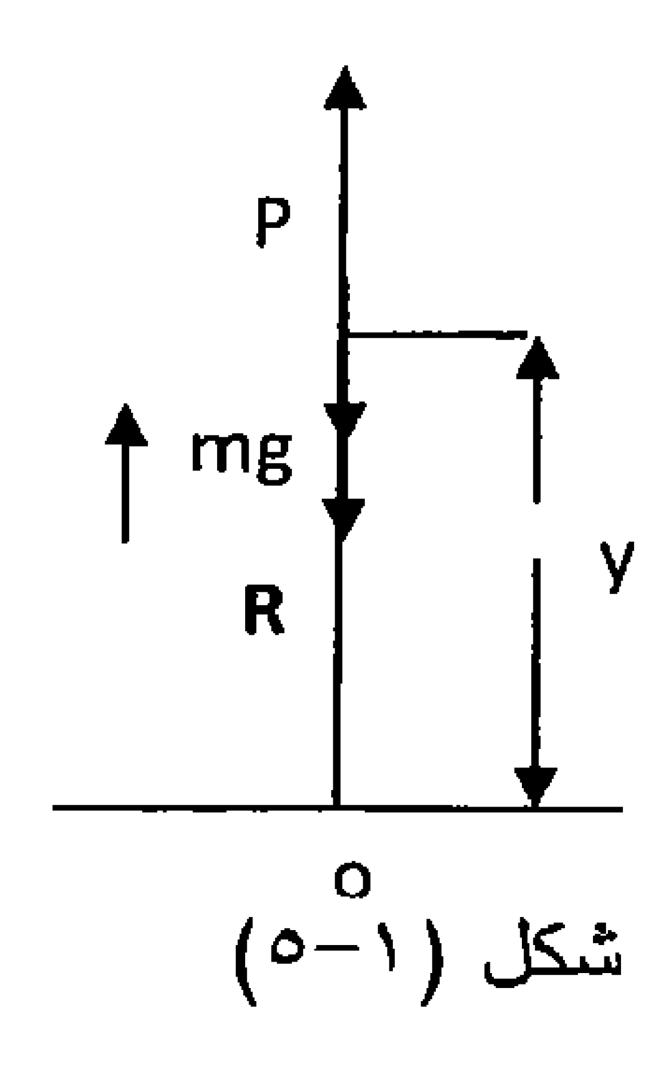
حيث c_2 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية حيث عند $t = 0$ كانت $v = 2v_1$ نستنتج من (7) أن $c_2 = \frac{1}{v_1}\tan^{-1}2$ ، بالتعويض عن ثابت التكامل c_2 في المعادلة (7) نحصل على

$$t = \frac{1}{v_1}\left(\tan^{-1}2 - \tan^{-1}\frac{v}{v_1}\right) \qquad (8)$$

عند أقصى ارتفاع تنعدم السرعة عندئذ لإيجاد زمن أقصى ارتفاع نضع $v = 0$ في المعادلة (8) نحصل على $t = \frac{1}{v_1}\tan^{-1}2$.

مثال(٣): قذف جسيم كتلته m رأسياً إلى أعلى بسرعة قدرها v_1 في وسط مفاومته تساوي $\frac{mg}{v_1^4}v^4$ حيث v السرعة ، g عجلة الجاذبية أثبت أن أقصى أرتفاع يصل اليه الجسيم هو $\frac{\pi}{8g}v_1^2$ وأنه يعود إلى موضع القذف بالسرعة $v_1\sqrt{\tanh\frac{\pi}{4}}$.

الحل :



شكل (١-٥)

بفرض أن نقطة بدء الحركة o نقطة أصل ونفرض أن النقطة وصلت إلى الموضع p وعلى بعد y من o وسرعتها v بعد زمن قدره t .

١- دراسة حركة الجسيم وهو صاعد :

القوى المؤثرة على الجسيم :

١- mg وزن الجسيم راسيا إلي أسفل،

٢- قوة المقاومة R رأسيا إلى أسفل وتساوي $\frac{mg}{v_1^4}v^4$

معادلة الحركة هي :

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{mg}{v_1^4}v^4$$

ومنها نجد أن

$$\ddot{y} = -\frac{g}{v_1^4}(v_1^4 + v^4) \qquad (1)$$

وبوضع $\ddot{y} = v\frac{dv}{dy}$ في (1) وبفصل المتغيرات والتكامل أي أن

$$\int \frac{vdv}{v_1^4 + v^4} = -\frac{g}{v_1^4}\int dy$$

وتكون نتيجة التكامل تعطينا

$$\frac{1}{2v_1^2}\tan^{-1}\frac{v^2}{v_1^2} = -\frac{g}{v_1^4}y + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ كانت $v = v_1$ ، $x = 0$ وبالتعويض في (2) نحصل على أن $c_1 = \frac{\pi}{8v_1^2}$ وبالتعويض في (2) نجد أن

$$\frac{1}{2v_1^2}\tan^{-1}\frac{v^2}{v_1^2} = -\frac{g}{v_1^4}y + \frac{\pi}{8v_1^2} \qquad (3)$$

ولإيجاد أقصى ارتفاع نضع في (3) $v = 0$ ، $y = H$ نجد أن أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم هو

$$H = \frac{\pi v_1^2}{8g} \qquad (4)$$

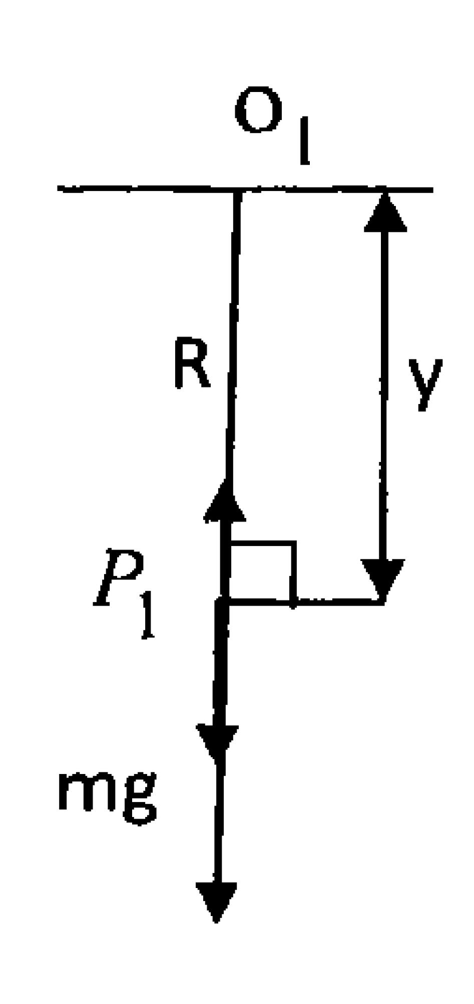
ونفرض أن أقصى موضع وصل إليه الجسيم هو o_1 حيث

$$oo_1 = H = \frac{\pi v_1^2}{8g}$$

وعند o_1 يسكن الجسيم لحظيا ثم يسقط رأسيا إلى أسفل بتأثير وزنه.

٢- دراسة حركة الجسيم وهو هابط :

ندرس حركة الجسيم راسيا إلى أسفل وباعتبار o_1 نقطة أصل ونفرض انه أثناء حركته صار في الموضع P_1 بعد زمن قدره t من لحظة تركه o_1 وصار بعده عن o_1 هو y وسرعته v كما في الشكل(١-٦) فإن معادلة حركة الجسيم عند اللحظة t هي



شكل (١- ٦)

$$\ddot{y} = v\frac{dv}{dy} = \frac{g}{v_1^4}(v_1^4 - v^4) \qquad (5)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int \frac{vdv}{v_1^4 - v^4} = \frac{g}{v_1^4}\int dy$$

ونتيجة التكامل تعطينا

$$\frac{1}{2v_1^2}\tanh^{-1}\frac{v^2}{v_1^2} = \frac{g}{v_1^4}y + c_2 \qquad (6)$$

حيث c_2 ثابت التكامل ولكن $v = 0$ عندما $y = 0$ وبالتعويض عن قيمة الثابت في (6) نجد أن $c_2 = 0$

وبالتعويض في (6) نجد أن

$$\frac{1}{2v_1^2}\tanh^{-1}\frac{v^2}{v_1^2} = \frac{g}{v_1^4}y \qquad (7)$$

وعندما يصل الجسيم الى موضع القذف o تكون $y = \frac{\pi v_1^2}{8g}$ فبالتعويض بهذه القيمة في العلاقة (7) نجد أن

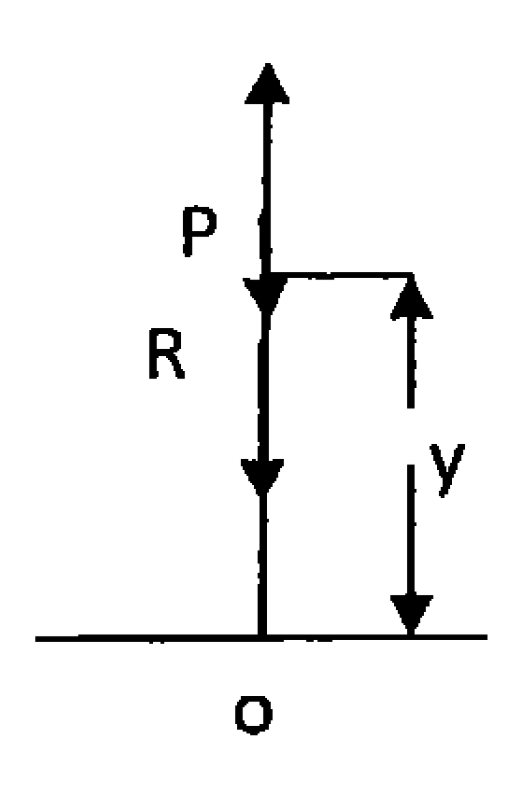
$$v = v_1 \sqrt{\tanh \frac{\pi}{4}}$$

وهي سرعة الوصول إلي نقطة القذف o، وهو المطلوب ثانياً.

مثال (٤): قذف جسيم بسرعة v_1 في وسط مقاومته تتناسب مع مكعب السرعة علماً بأنه ليست هناك قوى اخرى تؤثر عليه، فإذا كان الجسيم يقطع مسافة قدرها S في زمن قدره T إن نقصت سرعته من v_1 إلى v_2، فأثبت أن

$$\frac{S}{T} = \frac{2\, v_1\, v_2}{v_1 + v_2}$$

الحل :



شكل (١-٧)

بفرض أن نقطة بدء الحركة o نقطة أصل وأن الجسيم كتلته m ووصل إلى الموضع p وعلى بعد y من o وسرعتها v بعد زمن قدره t .

وعلى بعد y من o وسرعتها v بعد زمن قدره t.، أنظر الشكل (١-٧)

بفرض R هي قوة المقاومة فإن $R \propto v^3$

إذن

$$R = m\,k\,v^3 \qquad (1)$$

حيث k ثابت ، و أن القوى الوحيدة المؤثرة على الجسيم هى قوة المقاومة فإن معادلة حركة الجسيم عند اللحظة t هى

$$m\ddot{y} = -mkv^3 \tag{2}$$

١– دراسة العلاقة بين السرعة والإزاحة :

فإن معادلة الحركة تأخذ الصورة

$$\ddot{y} = v\frac{dv}{dy} = -kv^3$$

ومنها يكون

$$\frac{dv}{dy} = -kv^2 \tag{3}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$-\frac{1}{v} = -ky + c_1 \tag{4}$$

حيث c_1 ثابت التكامل يمكن تعيينه من الشروط الابتدائية

حيث عند $t = 0$ كانت $y = 0$ ، $v = v_1$ فإن $c_1 = -\frac{1}{v_1}$ ، وبالتعويض عن c_1 في (4) نحصل على

$$-\frac{1}{v} = -ky - \frac{1}{v_1} \tag{5}$$

عند $y = S$ فإن $v = v_2$ وبالتعويض في (5) نحصل على

$$S = \frac{v_1 - v_2}{kv_1v_2} \tag{6}$$

٢– دراسة العلاقة بين السرعة والزمن :

في هذه الحالة تأخذ معادلة الحركة الصورة

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt} = -kv^3 \tag{7}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$-\frac{1}{2v^2}=-kt+c_2 \qquad (8)$$

حيث c_2 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية حيث أنه عند $t=0$ كانت $v=v_1$ فإن

$c_2=-\frac{1}{2v_1^2}$ وبالتعويض عنه في (8) نجد أن

$$-\frac{1}{2v^2}=-kt-\frac{1}{2v_1^2} \qquad (9)$$

عند $y=S$ ، $t=T$ فإن $v=v_2$ فإننا نستنتج من المعادلة (9) أن

$$T=\frac{v_1^2-v_2^2}{2k\,v_1^2\,v_2^2} \qquad (10)$$

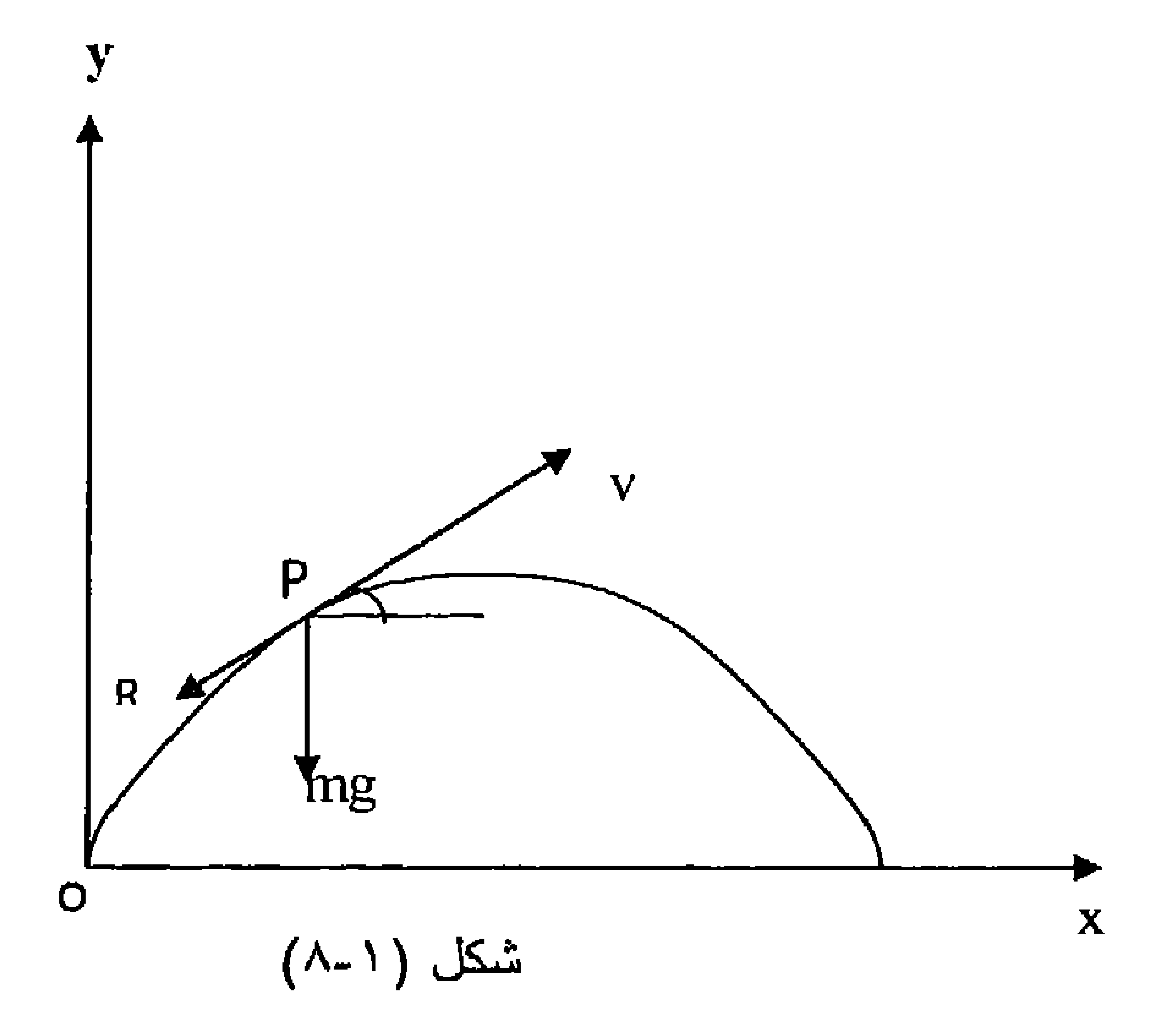
من (9) و(10) نستنتج أن

$$\frac{S}{T}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \qquad (11)$$

مثال (٥): قذفت نقطة مادية كتلتها الوحدة بسرعة ابتدائية v_o في اتجاه يميل بزاوية α مع الأفقي في وسط مقاومته λv حيث λ ثابت. أثبت أن اتجاه الحركة يصنع زاوية α مرة أخرى بعد زمن قدره

$$\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{2\lambda v_o}{g}\sin\alpha\right)$$

الحل :



شكل (١-٨)

نفرض أن P موضع النقطة المادية عند اللحظة t و v سرعتها عندئذ ، أنظر الشكل (١-٨)،

القوى المؤثرة :

١- وزن النقطة المادية mg رأسياً إلى أسفل،

٢- قوة المقاومة $\lambda \bar{v}$.

١- دراسة الحركة الأفقية :

معادلة الحركة هي

$$\ddot{x} = -\lambda v \cos\theta = -\lambda \dot{x} \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\ln \dot{x} = -\lambda t + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل، ومن الشروط الابتدائية نجد أن $c_1 = \ln v_o \cos\alpha$ وبالتعويض عن c_1 في (1) نجد أن

$$\dot{x} = v_o \cos\alpha \, e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

٢- دراسة الحركة الرأسية :

$$\ddot{y}=-\left(g+\lambda\dot{y}\right) \tag{4}$$

بفصل لمتغيرات والتكامل نحصل على

$$\ln\left(g+\lambda\dot{y}\right)=-\lambda t+c_2 \tag{5}$$

حيث c_2 ثابت التكامل ومن الشروط الابتدائية نجد أن

$c_2=\ln\left(g+\lambda v_o \sin\alpha\right)$ وبالتعويض عن c_2 في (5) نجد أن

$$\dot{y}=\frac{1}{\lambda}\left(g+\lambda v_0 \sin\alpha\right)-\frac{g}{\lambda} \tag{6}$$

وعندما يصنع اتجاه الحركة زاوية α مرة أخرى تكون

$$\tan\alpha=-\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{7}$$

وبالتعويض من (3) و(5) في (7) نجد أن

$$\tan\alpha=-\frac{\left(g+\lambda v_o \sin\alpha\right)}{\lambda v_o \cos\alpha\, e^{-\lambda t}}$$

ومنها نجد أن

$$e^{\lambda t}=\left(\frac{2\lambda v_0 \sin\alpha}{g}+1\right)$$

وبأخذ لوغاريتم للطرفين نحصل على

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\lambda v_0 \sin\alpha}{g}+1\right)$$

وهو الزمن المطلوب.

مثال (٦): قذف جسيم في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاوم تتناسب مع السرعة $\lambda m v$ إذا كان τ هو الزمن الذي يأخذه الجسيم حتى يصل إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف، β الزاوية التي يصنعها اتجاه الحركة مع الأفقي عندئذ. برهن أن

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{(e^{\lambda\tau}-1)-\lambda\tau}{(e^{-\lambda\tau}-1)+\lambda\tau}$$

الحل :

وجدنا في المثال السابق أن مركبتي السرعة للجسيم عند اللحظة t هما

$$\dot{x}=v_o\cos\alpha\, e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

$$\dot{y}=\frac{1}{\lambda}\left(g+\lambda v_o\sin\alpha\right)e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda} \qquad (2)$$

حيث v_o هي سرعة القذف الابتدائية ، α زاوية القذف. بتكامل المعادلة (2) نحصل على

$$y=-\frac{1}{\lambda^2}\left(g+\lambda v_o\sin\alpha\right)e^{-\lambda t}-\frac{g}{\lambda}t+c \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، حيث عند $t=0$ ، $y=0$ نجد أن

$$c=\frac{1}{\lambda^2}\left(g+\lambda v_o\sin\alpha\right)$$

وبالتعويض عن الثابت في (3) نحصل على

$$y=\frac{1}{\lambda^2}\left(g+\lambda v_o\sin\alpha\right)\left(1-e^{-\lambda t}\right)-\frac{g}{\lambda}t \qquad (4)$$

ولإيجاد الزمن الذي يأخذه الجسيم حتى يصل الى المستوى الافقي المار بنقطة القذف (زمن الطيران)، نضع $y=0$ و $t=\tau$ في (4) نحصل على

$$\tau=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\lambda v_o}{g}\sin\alpha\right)\left(1-e^{-\lambda t}\right) \qquad (5)$$

عندئذ تكون مركبتي السرعة عند المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أي عند $t=\tau$ هما

$$\dot{x} = v_o \cos\alpha\, e^{-\lambda\tau} \tag{6}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\lambda}\left(g+\lambda v_o \sin\alpha\right) e^{-\lambda\tau} - \frac{g}{\lambda} \tag{7}$$

ويكون اتجاه الحركة يصنع زاوية β مع الأفقي حيث

$$\tan\beta = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{8}$$

وبالتعويض من (6) و(7) في (8) نحصل على

$$\tan\beta = -\tan\alpha + \frac{g}{\lambda v_o \cos\alpha}\left(e^{\lambda\tau} - 1\right) \tag{9}$$

ومن (9) نجد أن

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = -1 + \frac{g}{\lambda v_o \sin\alpha}\left(e^{\lambda\tau} - 1\right) \tag{10}$$

من (5) نستنتج أن

$$1 + \frac{\lambda v_o}{y}\sin\alpha = \frac{\lambda\tau}{1-e^{-\lambda t}} \tag{11}$$

ومن (10) و (11) نجد أن

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\left(e^{\lambda\tau} - 1\right) - \lambda\tau}{\left(e^{-\lambda\tau} - 1\right) + \lambda\tau}$$

وهوالمطلوب.

٤/١- تمارين :

١. قُذف جسيم رأسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية μv_1 في وسط مقاومته لوحدة الكتل تساوي λv حيث λ ثابت، v السرعة. أثبت أن الجسيم يصل إلى ارتفاع قدره $\frac{v_1^2}{g}[\mu - \ln(1+\mu)]$.

٢. قُذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية v_1 في وسط مقاومته تساوي $(g v_1^{-2} \tan^2\alpha)\, v^2$ لوحدة الكتل حيث α ثابت ، v السرعة. أثبت أن الجسيم يعود إلى موضع القذف بسرعة قدرها $v_1 \cos\alpha$ بعد زمن قدره $\frac{v_1 \cot\alpha}{g}\left(\alpha + \ln\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$.

٣. قُذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها $\sqrt{\frac{3g}{\lambda}}$ في وسط مقاومته لوحدة الكتل تساوي λv^2 حيث λ ثابت ، v السرعة ، أثبت أن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو $\frac{1}{\lambda}\ln 2$ ، ثم أثبت أنه يعود إلى نقطة القذف بسرعة $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{\lambda}}$. أثبت أيضا أن الزمن الكلي للحركة هو

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda g}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\ln(7+4\sqrt{3})\right)$$

٤. قُذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة قدرها $v_1 = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$ في وسط مقاومته $m\mu v$ ، حيث μ ثابت، v السرعة، m كتلة الجسيم، أثبت أن الجسيم يصل إلى ارتفاع قدره $\frac{1}{2\mu}\ln(1+\lambda^2)$ في زمن قدره $\frac{1}{\sqrt{\mu g}}\tan^{-1}\lambda$ ، وأنه يعود إلى موضع القذف بسرعة قدرها $\frac{v_1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

٥. قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها $v_1 = \frac{g}{\lambda}$ في وسط مقاومته λv لوحدة الكتل حيث λ ثابت . أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم h. أثبت أيضاً الزمن الذي يأخذه يساوي $\frac{v_1^2 - gh}{g v_1}$.

٦. أسقط جسيمان رأسياً في لحظة واحدة في وسط مقاومته تتناسب مع مربع السرعة فإذا علم سرعتيهما النهائيتين في هذا الوسط هما v_1 ، $\frac{1}{2}v_1$ علي الترتيب، أثبت أنه بعد زمن قدره t تكون سرعتيهما v_2 ، v_3 حيث $v_3(v_1^2+v_2^2)=v_2v_1^2$.

٧. إذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة وكان المدى على مستوى أفقي مار بنقطة القذف نهاية عظمى، فأثبت أن الزاوية ϑ التي يصنعها اتجاه القذف مع الرأسي تعطى بالعلاقة

$$k(1+k\cos\vartheta)=(k+\cos\vartheta)\ln(1+k\sec\vartheta)$$

حيث k هي النسبة بين سرعة القذف والسرعة النهائية.

٨. قُذفت نقطة مادية بسرعة v_0 على مستوى أفقي أملس في وسط مقاومتة لوحدة الكتل هي k مرة من مكعب السرعة. أثبت أن المسافة التي تقطعها النقطة المادية في زمن t هي

$\frac{1}{kv_0}\left(\sqrt{1+2kv_0^2t}-1\right)$ وأن السرعة عندئذ هي $\frac{v_0}{\sqrt{1+2kv_0^2t}}$.

٩. قُذفت نقطة مادية بسرعة v_0 في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومته $m\lambda v$ أثبت أن العجلة عند أي موضع تعطى بالعلاقة $f=f_0e^{-\lambda t}$ حيث f_0 هي العجلة في بداية الحركة ، t الزمن، v سرعة النقطة. أثبت أيضاً اتجاه العجلة يكون ثابتاً.

١٠. قُذف جسيم كتلته m رأسياً إلى أعلى بسرعة إبتدائية v_0 في وسط مقاومته mkv حيث k ثابت، v سرعة الجسيم عند أي لحظة. اثبت أن $v=u\tan(\alpha-kut)$ حيث u سرعة الجسيم عندما تكون المقاومة مساوية للوزن، $\tan\alpha=\frac{v_0}{u}$. اوجد أيضاً العلاقة بين المسافة والزمن وأقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم والسرعة التي يصل بها إلى نقطة القذف.

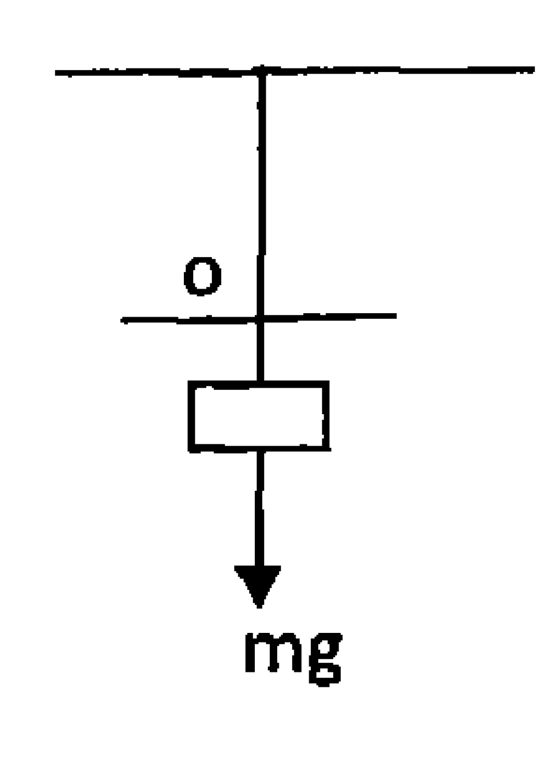
الفصل الثاني

الحركة التوافقية

Harmonic Motion

٢/١- الحركة التوافقية المخمدة : Damped Harmonic Oscillation

درسنا من قبل الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion (S.H.M) في خط مستقيم وهي حركة نقطة في خط مستقيم تحت تأثير قوة متجهه دائماً نحونقطة ثابتة o (تسمى مركز الحركة) تتناسب مع بعد النقطة عن مركز الحركة، ومعادلة الحركة التوافقية البسيطة التي مركزها $x=0$ هي $\ddot{x}=-\omega^2 x$ وزمنها الدوري $T=\frac{2\pi}{\omega}$ وفي دراستنا للحركة التوافقية البسيطة أهملنا كل ما يتعلق بالمقاومة الناتجة من الاحتكاك أوالهواء، ومن الناحية العملية يمكن أن تؤثر قوى مختلفة على تذبذب توافقي بحيث يقلل من مقدار الذبذبات المتتابعة حول موضع



شكل (٢-١)

الاتزان o (مركز الحركة) شكل (٢-٢) مثل هذه القوى تسمى أحيانا قوى مضائلة أوقوى الإخماد Damping force وقوى الإخماد تتناسب مع سرعة الجسيم ويمكن استخدامها كمثال تقريبي وتعطى على الصورة

$$\vec{F}=-\beta\,\vec{v}$$

حيث β ثابت يسمى معامل التضاؤل (الإخماد) Damping coefficient.

ولدراسة الذبذبات المخمدة لحركة كتلة معلقة في طرف زنبرك طرفه الآخر مثبت وتتحرك الكتلة m في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة، فإذا أزيحت الكتلة من موضع الاتزان o مسافة y فإن القوي المؤثرة على الكتلة المعلقة قوة جاذبة نحو o وتتناسب مع بعد الكتلة عن o بالإضافة إلى قوة الإخماد والتي تتناسب مع سرعة الكتلة، فإن معادلة حركة الكتلة هي

$$m\ddot{y} = -ky - 2\mu m\dot{y} \tag{1}$$

حيث μ ، k ثابتان، ويمكن وضع المعادلة (1) على الصورة التالية

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega_n^2 y = 0 \tag{2}$$

حيث $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ ، والمعادلة تمثل معادلة تفاضلية عادية متجانسة ومن الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة ويمكن حلها باستخدام المعادلة المساعدة والمعادلة المساعدة، لهذه المعادلة هي

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_n^2 = 0 \tag{3}$$

والمعادلة (3) معادلة من الدرجة الثانية جذريها هما λ_1 , λ_2 حيث

$$\lambda_1 , \lambda_2 = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_n^2} \tag{4}$$

وبذلك يكون لدينا الحالات الثلاثة التالية:-

أ- الحالة الأولى :

إذا كانت $\mu > \omega_n$ أي أن معامل الإخماد كبير جداً بالنسبة إلي ثابت الزنبرك وفي هذه الحالة يكون جذري المعادلة (3) المعطى من المعادلة (4) حقيقيان ومختلفان ويكون حل المعادلة (3) على الصورة

$$y(t) = e^{-\mu t}(A\cosh\omega t + B\sinh\omega t) \tag{5}$$

ويمكن كتابة المعادلة (5) في الصورة التالية

$$y(t) = Ce^{-\mu t}\cosh(\omega t + \varepsilon) \tag{6}$$

حيث A , B , ε , C ثوابت، $\omega = \sqrt{\mu^2 - \omega_n^2}$ ، ونلاحظ أن المعادلة (6) لا تحتوي على دالة دورية فإننا نستنتج أن الحركة غير تذبذبية.

ب- الحالة الثانية :

إذا كانت $\mu < \omega_n$ فإن الجذران λ_2 , λ_1 تخيليان ومترافقان ويكون حل المعادلة (3) على الصورة

$$y(t)=e^{-\mu t}\left(A_1 \cos\omega_d t + B_1 \sin\omega_d t\right) \quad (7)$$

ويمكن وضع المعادلة (7) على الصورة التالية

$$y(t)=C_1 e^{-\mu t}\cos(\omega_d t+\varepsilon_1) \quad (8)$$

حيث A_1 ، B_1 ، ε_1 ، C_1 ثوابت اختيارية، حيث

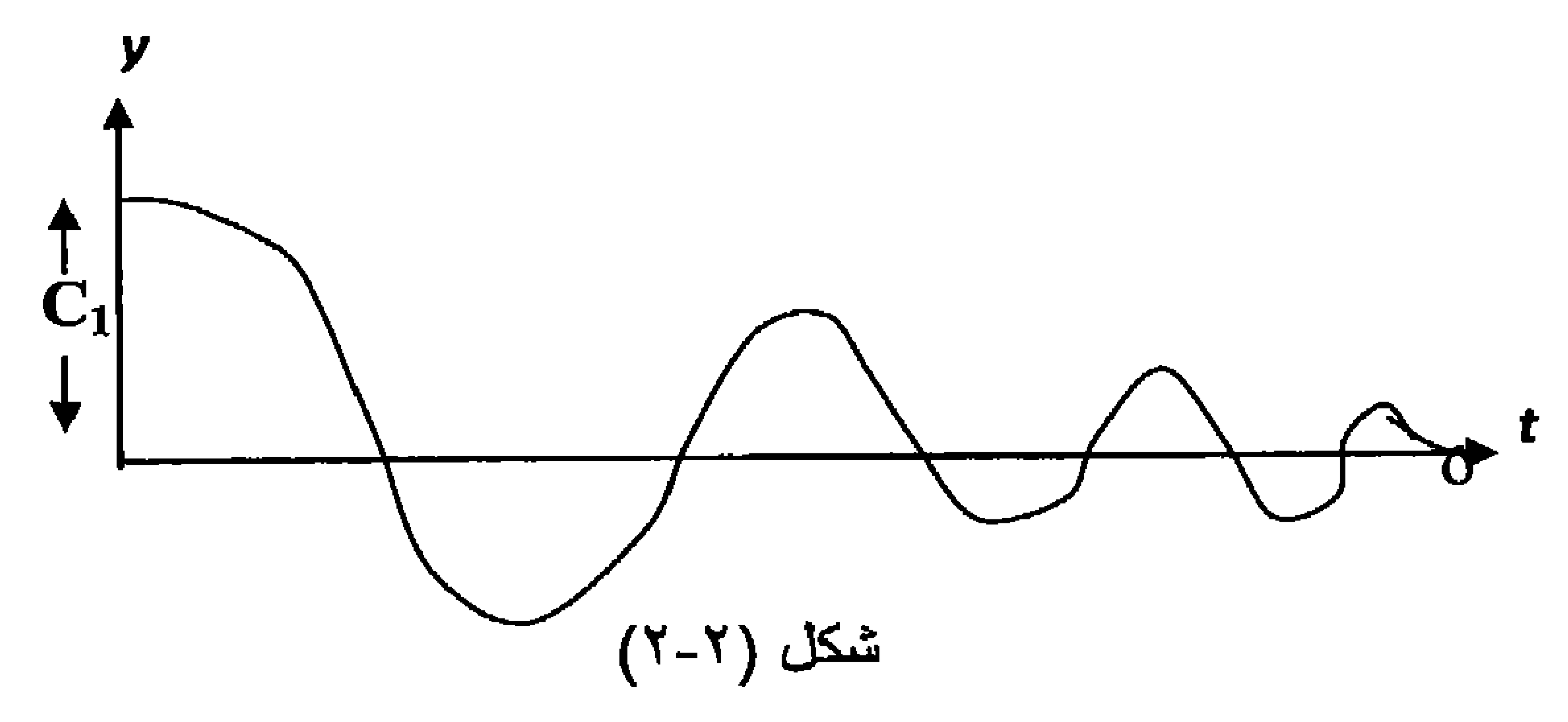
$$\tan\varepsilon_1=\frac{A_1}{B_1},\ C_1=\sqrt{A_1^2+B_1^2},\ A_1=C_1\cos\varepsilon_1,$$

$$B_1=C_1\sin\varepsilon_1,\ \omega_d=\sqrt{\omega_n^2-\mu^2}$$

المعادلة (8) تمثل حركة تذبذبية ولكن لا تكرر نفسها وزمنها الدوري T_d وهو الفرق بين أي إزاحتين متتاليتين حيث

$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d} \quad (9)$$

وسعتها هي $C_1 e^{-\mu t}$ وتتناقص مع الزمن وكما هومبين بالرسم



شكل (٢-٢)

وتناقص السعة تدريجياً مع مرور الزمن إلى أن تخمد بعد فترة كبيرة من الزمن ونستنتج من ذلك ان الحركة توافقية تذبذبية ومخمدة ومعامل الإخماد $e^{-\mu t}$.

أيضاً يمكن كتابة الزمن الدوري (9) على الصورة التالية

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\omega_n^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\omega_n^2}}} \qquad (10)$$

حيث T هوالزمن الدوري للحركة التوافقية البسيطة، وفي حالة $\frac{\mu}{\omega_n}$ صغيرة جداً

فإن $T_d \cong T$.

ج - الحالة الثالثة :

إذا كانت $\mu = \omega_n$ فإن الجذران λ_1 , λ_2 حقيقيان ومتساويان ويكون حل المعادلة (3) على الصورة

$$y(t) = e^{-\mu t}(A\, t + B) \qquad (11)$$

حيث B , A ثابتان اختياريان وتمثل حركة غير تذبذبية تتناقص مع مرور الزمن، ويسمى هذا النوع من الإخماد بالإخماد الحرج.

٢/٢- الذبذبات المجبرة (القسرية) Forced Oscillation :

ندرس هنا الحركة التذبذبية لجسيم كتلm معلق بواسطة زنبرك تؤثر عليه بالإضافة إلى قوة الزنبرك قوة أخرى دورية تتغير مع الزمن وتسمى بالقوة المجبرة أو(الاضطرابية) ومقدارها $Q_0 m \cos\omega_f t$، حيث Q_0 ثابت وتسمى الذبذبات الناتجة عنها بالذبذبات المجبرة وزمنها الدوري هو نفس الزمن الدوري للقوة الدورية، فإن معادلة حركة الجسيم تكون

$$m\ddot{y} = -k\,y + mQ_o \cos\omega_f\, t$$

ويمكن وضع معادلة الحركة على الصورة

$$\ddot{y} + \omega_n^2\, y = Q_o \cos\omega_f\, t \qquad (1)$$

حيث $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$، والمعادلة (1) تمثل معادلة تفاضلية عادية خطية ومن الرتبة الثانية ولإيجاد حلها العام يوجد لدينا حالتان

أ-الحالة الأولى : عندما $\omega_n \neq \omega_f$

في هذه الحالة يكون الحل العام للمعادلة (1) مكون من جزئيين أولهما: الحل المكمل وهو حل المعادلة المتجانسة للمعادلة $\ddot{y}+\omega_n^2 y=0$ وثانيهما الحل الخاص، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H(t)=c_1\cos\omega_n t+c_2\sin\omega_n t \qquad (2)$$

ويمكن كتابته على الصورة

$$y_H(t)=C\cos(\omega_n t+\varepsilon) \qquad (3)$$

حيث C,ε,c_1,c_2 ثوابت اختيارية، ولإيجاد الحل الخاص باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي $D=\frac{d}{dx}$ فإن

$$y_p(t)=\frac{Q_o}{D^2+\omega_n^2}\cos\omega_f t \qquad (4)$$

من (4) نستنتج أن

$$y_p(t)=\frac{Q_o}{\omega_n^2-\omega_f^2}\cos\omega_f t \qquad (5)$$

عندئذ يكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y(t)=C\cos(\omega_n t+\varepsilon)+\frac{Q_o}{\omega_n^2-\omega_f^2}\cos\omega_f t \qquad (6)$$

نستنتج من المعادلة (6) وهي حل المعادلة مكون من جزئيين الجزء الأول يمثل حركة توافقية بسيطة أي تمثل ذبذبة حرة التي لها الزمن الدوري $\frac{2\pi}{\omega_n}$ بينما الجزء الثاني من الحل يمثل ما يسمى بالذبذبة المجبرة الناتجة من تأثير القوة الدورية والتي لها الزمن الدوري $\frac{2\pi}{\omega_f}$.

ب – الحالة الثانية (حالة الرنين Resonance) :

عندما $\omega_n=\omega_f=\omega$ في هذه الحالة تكون معادلة الحركة (1) على الصورة

$$\ddot{y}+\omega^2 y=Q_o\cos\omega t \qquad (7)$$

ويكون حل المعادلة المتجانسة للمعادلة (7) هو

$$y_H(t)=c_3\cos\omega t+c_4\sin\omega t \qquad (8)$$

حيث c_3, c_4 ثابتان اختياريان وهذا الحل يمثل الذبذبة الحرة زمنها الدوري $\frac{2\pi}{\omega}$

ونفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p(t)=t(c_5\cos\omega t+c_6\sin\omega t) \qquad (9)$$

حيث c_5 , c_6 ثابتان اختياريان يمكن تعيينهما بالتعويض من (9) في معادلة الحركة (7) نجد أن $c_5=0,\quad c_6=\frac{Q_o}{2\omega}$

وبذلك يكون الحل الخاص على الشكل

$$y_p(t)=\frac{Q_o}{2\omega}t\ \sin\omega t \qquad (10)$$

والحل الخاص الممثل بالمعادلة (10) يمثل الذبذبات المجبرة الناتجة من الدالة الدورية وتزداد مع مرور الزمن وهذه الظاهرة للسعة الكبيرة للذبذبة المجبرة والتي لها نفس زمن الذبذبة الحرة تعرف بظاهرة الرنين وبذلك يكون الحل العام لهذه الحالة هو

$$y(t)=c_3\cos\omega t+c_4\sin\omega t+\frac{Q_o}{2\omega}t\ \sin\omega t \qquad (11)$$

٢/٣- الذبذبات المخمدة المجبرة: Damping Forced Oscillation

في هذه الحالة سوف ندرس الذبذبات المجبرة في وجود قوة مقاومة، لذلك نعتبر جسيم كتلته m يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير القوى الآتية:

١. قوة إرجاعية kx حيث k ثابت،

٢. قوة مقاومة $2\gamma m\dot{x}$، حيث γ ثابت،

٣. قوة اضطرابية $f_o m\cos\alpha t$، حيث α, f_o ثابتان.

فإن معادلة حركة الجسيم هي

$$m\ddot{x}=-kx-2\gamma m\dot{x}+mf_o\cos\alpha t$$

ويمكن وضع معادلة الحركة على الصورة التالية

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=f_o\cos\alpha t \qquad (1)$$

حيث $\omega^2=\frac{k}{m}$، ومعادلة الحركة تمثل معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى وغير متجانسة وحلها العام هو

$$x(t)=x_H(t)+x_p(t) \qquad (2)$$

حيث $x_H(t)$ هو حل المعادلة المتجانسة للمعادلة (2) وهي

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=0 \qquad (3)$$

والمعادلة المساعدة لهذه المعادلة

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega^2=0 \qquad (4)$$

ويكون جذري المعادلة (4) هما λ_1 , λ_2 حيث

$$\lambda_1 , \lambda_2=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega^2} \qquad , \gamma^2<\omega^2 \qquad (5)$$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة (3) يكون على الشكل

$$x_H(t)=e^{-\gamma t}\left(A e^{t\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}+B\, e^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}\right) \qquad (6)$$

ويمكن وضع الحل على الصورة

$$x_H(t)=Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\varepsilon) \qquad (7)$$

حيث $\omega_d=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$، C,ε, B , A ثوابت اختيارية، ونلاحظ أن هذه الحركة حركة تذبذبية سعتها $Ce^{-\gamma t}$ وتتناقص مع الزمن وبعد فترة من الزمن سوف يخمد.

ويوضع الحل الخاص على الشكل

$$x_p(t)=c_1\cos\alpha t+c_2\sin\alpha t \qquad (8)$$

وبالتعويض بهذا الحل في المعادلة (3) نحصل على

$$c_1=\frac{(\omega^2-\alpha^2)f_o}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2} \quad , \quad c_2=\frac{2\alpha\gamma f_o}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}$$

وبالتعويض عن c_1 , c_2 في معادلة(8) نحصل على

$$x_p(t)=\frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}\left((\omega^2-\alpha^2)\cos\alpha t+2\alpha\gamma\sin\alpha t\right)$$

ويمكن وضع $x_P(t)$ على الصورة التالية

$$x_p(t)=\frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}\cos(\alpha t-\varphi) \qquad (9)$$

حيث

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha\gamma}{\omega^2-\alpha^2}\right) \qquad (10)$$

كما نلاحظ في هذا الجزء من الحل أن الحركة أيضا حركة تذبذبية سعتها هي

$$\frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}$$

وتكون الإزاحة عند أي لحظة هي

$$x(t)=x_H(t)+x_p(t) \qquad (11)$$

٢/٤- أمثلة :

مثال (١) : جسيم كتلته 3 (وحدات من الكتل) يتحرك على محور x تحت تأثير قوة تتجه نحو نقطة الأصل مقدارها 18x وقوة إخماد مقدارها $27\dot{x}$، فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع $x=20$ فأوجد الإزاحة والسرعة عند أي لحظة.

الحل :

$17\dot{x}$ $18x$ o X x

شكل (٢-٣)

من الشكل (٢-٢) معادلة الحركة

$$3\ddot{x}=-18x-27\dot{x}$$

ويمكن وضع معادلة الحركة على الصورة

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0 \qquad (1)$$

المعادلة (1) معادلة تفاضلية متجانسة ومن الرتبة الثانية وتكون المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \qquad (2)$$

فإن جذري المعادلة المساعدة (2) هما $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ويكون حل المعادلة (1) هو

$$x(t) = e^{-3t}(A\,t + B) \qquad (3)$$

حيث A , B ثابتان اختياريان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية، نستنتج من (3) سرعة الجسيم عند اللحظة t وهي

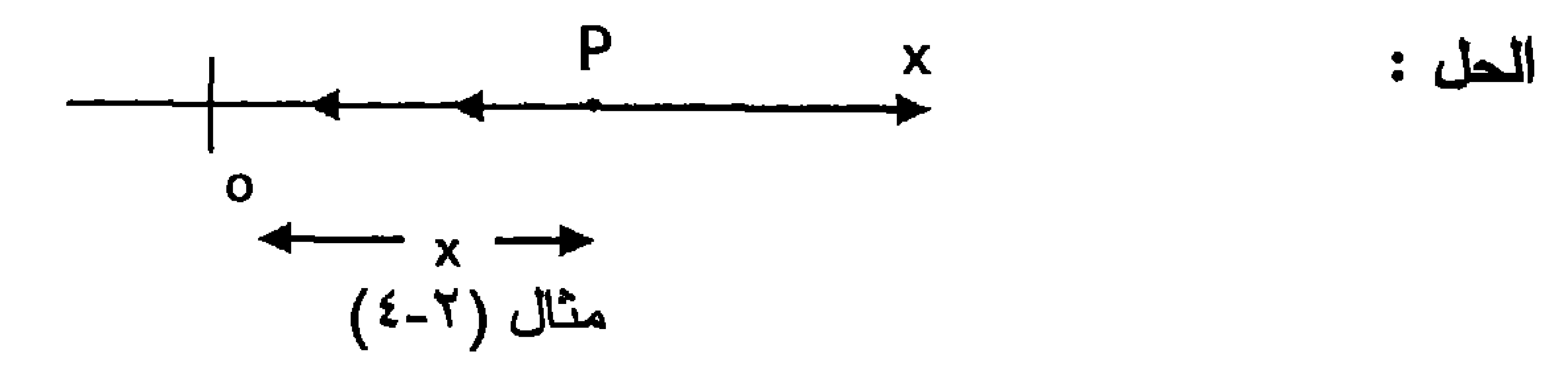
$$\dot{x}(t) = A\,e^{-3t} - 3e^{-3t}(A\,t + B) \qquad (4)$$

من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $x = 20, \dot{x} = 0$ بالتعويض في (3) ، (4) نجد أن $B = 20$, $A = 60$ وبالتعويض عن A , B في المعادلتين (3)، (4) نجد أن الازاحة و السرعة عند أي لحظة t هما على الترتيب،

$$x(t) = 20e^{-3t}(3\,t + 1), \quad \dot{x}(t) = -90\,t\,e^{-3t}$$

مثال (٢) : جسيم كتلته 5 وحدات ويتحرك على المحور x تحت تأثير قوة تتجه نحو نقطة الأصل مقدارها $40x$ وقوة إخماد ومقدارها $20\dot{x}$ فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع $x = 20$ ، أوجد الإزاحة والسرعة عند أي لحظة، كذلك أوجد السعة والزمن الدوري.

الحل :



مثال (٢-٤)

من الشكل (٢-٣) فإن معادلة الحركة هي

$$5\ddot{x} = -40x - 20\dot{x}$$

ويمكن وضع معادلة الحركة على الصورة التالية

$$x+4x+8x=0 \qquad (1)$$

وتكون المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2+4\lambda+8=0 \qquad (2)$$

فإن جذري المعادلة المساعدة (2) هما $\lambda_2=-2-2i \quad , \quad \lambda_1=-2+2i$

ويكون حل المعادلة (1) الذي يمثل الإزاحة عند اللحظة t هو

$$x(t)=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t) \qquad (3)$$

وأيضاً تكون السرعة عند اللحظة t هي

$$x(t)=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t)+ e^{-2t}(-2A\sin 2t+2B\cos 2t) \qquad (4)$$

حيث B , A ثابتان اختياريان يمكن تعينهما من الشروط الابتدائية، من الشروط الابتدائية عند $t=0$ كانت $\dot{x}=0$، $x=20$ نجد أن $B=20 \quad , A=20$، بالتعويض في (3)، (4) نجد أن الإزاحة والسرعة عند أي لحظة هما

$$x(t)=20\,e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t) \qquad (5)$$

$$\dot{x}(t)=-80\,e^{-2t}\sin 2t \qquad (6)$$

ويمكن وضع (5) على الصورة

$$x(t)=20\sqrt{2}\,e^{-2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (7)$$

ونستنتج من المعادلة (5) أن الحركة تذبذبية سعتها $20e^{-2t}$ وزمنها الدوري $T_d=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

مثال (٣): إذا كانت الإزاحة لجسيم متحرك على المحور x تعطى بالعلاقة:

$$\ddot{x}+16x=F(t)$$

فإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع $x=0$، فأوجد الإزاحة عند أي لحظة عندما

(i) $F(t)=64\sin 4t$ (ii) $F(t)=160\cos 6t$

الحل :

(i) معادلة الحركة :

$$\ddot{x}+16x=64\sin 4t \qquad (1)$$

نلاحظ من معادلة الحركة أنها حالة رنين وهي معادلة تفاضلية خطية ومن الرتبة الثانية وغير متجانسة، وحل المعادلة المتجانسة لها هو

$$x_H=A\cos 4t+B\sin 4t \qquad (2)$$

وأيضا الحل الخاص هو

$$x_p=t(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t) \qquad (3)$$

حيث A ، c_1 ، c_2 ثوابت اختيارية ، وبالتعويض عن الحل الخاص في معادلة الحركة نجد أن

$$c_2=-8,\qquad c_1=0 \qquad (4)$$

وبذلك يكون الحل العام هو

$$x(t)=A\cos 4t+B\sin 4t-8t\cos 4t \qquad (5)$$

أيضا تكون

$$\dot{x}(t)=-4A\sin 4t+4B\cos 4t+32t\sin 4t-8\cos 4t \qquad (6)$$

ومن الشروط الابتدائية $x=0$ ، $\dot{x}=0$ عند $t=0$ ، وبالتعويض في المعادلتين (5)، (6)، ومنهما نستنتج أن $A=0$ ، $B=2$ ، وبالتعويض في المعادلة (5) نجد أن الإزاحة عند اللحظة t هي

$$x(t)=2\sin\omega t-8t\cos 4t \qquad (7)$$

وهو المطلوب.

(ii)معادلة الحركة :

$$\ddot{x}+16x=160\cos 6t \qquad (8)$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وخطية وغير متجانسة حلها العام هو

$$x(t)=x_H(t)+x_p(t) \qquad (9)$$

حيث $x_H(t)$ حل المعادلة المتجانسة للمعادلة (8) وهو على الشكل

$$x_H(t)=A_1\cos 4t+B_1\sin 4t \qquad (10)$$

حيث A_1 ، B_1 ثابتان اختياريان يمكن تعيينها من الشروط الابتدائية، أيضاً $x_p(t)$ هو الحل الخاص للمعادلة (8) ويعطى على الشكل

$$x_p(t) = \frac{160}{D^2 + 16} \cos 6t \qquad (11)$$

ومنها نستنتج أن

$$x_p(t) = -8 \cos 6t \qquad (12)$$

ويكون الحل العام على الشكل

$$x(t) = A_1 \cos 4t + B_1 \sin 4t - 8 \cos 6t \qquad (13)$$

ويكون سرعة الجسيم عند اللحظة t هي

$$\dot{x}(t) = -4A_1 \sin 4t + 4B_1 \cos 4t - 48 \cos 6t \qquad (14)$$

أيضاً من الشروط الابتدائية $x = 0$ ، $\dot{x} = 0$ عند $t = 0$ نجد أن

$$B_1 = 0 \quad ، \quad A_1 = 8 \qquad (15)$$

بالتعويض من (15) في المعادلة (13) نحصل على الإزاحة عند اللحظة t

$$x(t) = 8(\cos 4t - \cos 6t) \qquad (16)$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية يمكن وضع الإزاحة على الصورة التالية

$$x(t) = 16 \sin 5t \ \sin t$$

مثال (٤): إذا كانت الإزاحة لجسيم متحرك على المحور x تعطى بالعلاقة $\ddot{x} + 4x = 8 \sin \omega t$ ، $\omega > 0$ ، وإذا بدأ الجسيم الحركة من السكون من الموضع $x = 0$. أوجد الإزاحة عند أي لحظة، أيضاً ناقش الرنين.

الحل :

في هذا المثال يجب علينا دراسة حالتان :

الحالة الأولى : عندما $\omega \neq 2$

معادلة الحركة

$$\ddot{x} + 4x = 8 \sin \omega t \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية عادية خطية من الرتبة الثانية وغير متجانسة حلها العام يعطي الإزاحة للجسيم المتحرك وهو

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \quad (2)$$

حيث $x_H(t)$ حل المعادلة المتجانسة ويعطى على الصورة

$$x_H(t) = A\cos 2t + B\sin 2t \quad (3)$$

حيث A ، B ثابتان اختياريان، أيضاً $x_p(t)$ هو الحل الخاص للمعادلة (1) وهو على الصورة

$$x_p(t) = \frac{8}{4-\omega^2}\sin\omega t \quad (4)$$

ويكون الحل العام وهو يمثل الإزاحة عند اللحظة t

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{8}{4-\omega^2}\sin\omega t \quad (5)$$

والسرعة عند اللحظة t هي

$$\dot{x}(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t + \frac{8\omega}{4-\omega^2}\cos\omega t \quad (6)$$

من الشروط الابتدائية $x = 0$ ، $\dot{x} = 0$ عند $t = 0$ نجد أن $A = 0$ ، $B = -\frac{4\omega}{4-\omega^2}$ وبالتعويض عن A ، B في المعادلة (5) عندئذ تكون الإزاحة عند اللحظة t هي

$$x(t) = \frac{4}{4-\omega^2}(2\sin\omega t - \omega\sin 2t) \quad (7)$$

الحالة الثانية : عندما $\omega = 2$ (ظاهرة الرنين)

في هذه الحالة تكون معادلة الحركة على الشكل

$$\ddot{x} + 4x = 8\sin 2t \quad (8)$$

حل المعادلة المتجانسة لهذه المعادلة هو

$$x_H(t) = A_1\cos 2t + B_1\sin 2t \quad (9)$$

حيث A ، B ثابتان اختياريان ، أيضا الحل الخاص هو

$$x_p(t) = t(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) \quad (10)$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتان اختياريان بالتعويض بالحل الخاص في المعادلة (8) نجد أن

$c_1=-2$ ، $c_2=0$ و بالتعويض في المعادلة (10) فإن

$$x_p(t)=-2t\cos 2t \qquad (11)$$

ومن المعادلة (10)، (10) نجد أن الإزاحة عند أي لحظة t هي

$$x(t)=A_1\cos 2t+B_1\sin 2t-2t\cos 2t \qquad (12)$$

أيضا السرعة عند اللحظة t تكون

$$\dot{x}(t)=-2A_1\sin 2t+2B_1\cos 2t-2\cos 2t+4t\sin 2t \qquad (13)$$

من الشروط الابتدائية $x=0$ ، $\dot{x}=0$ عند $t=0$ نجد أن من المعادلتين (12)، (13) $A_1=0$ ، $B_1=1$ وبالتعويض في المعادلة(12) نحصل على الإزاحة على الصورة

$$x(t)=\sin 2t-2t\cos 2t \qquad (14)$$

وهو المطلوب.

مثال (٥): ما هي قيمة α لكي تكون السعة $\dfrac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}$ أكبر ما يمكن في الذبذبات المخمدة المجبرة. وما هي تلك السعة.

الحل :

لكي تكون للسعة $\dfrac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}$ نهاية عظمى، يجب أن تكون الكمية

$$U=\left((\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2\right) \qquad (1)$$

نهاية صغري، ولإيجاد النهاية الصغرى نضع $\dfrac{dU}{d\alpha}=0$، ومنها نجد أن

$$4\alpha\left(2\gamma^2-\omega^2+\alpha^2\right)=0 \qquad (2)$$

ومنها نستنتج أن

$$\alpha=\sqrt{\omega^2-2\gamma^2} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (3) في (1) نجد أن

$$\left((\omega^2-\alpha^2)^2+4\gamma^2\alpha^2\right)=4\gamma^2(\omega^2-\gamma^2) \qquad (4)$$

فإن أكبر سعة هي $\dfrac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}$

مثـال (٦): إذا كانت الإزاحة لجسيم متحرك علي المحور x تعطى بالعلاقة $\ddot{x}+4\dot{x}+8x=20\cos 2t$ فإذا بدأ الجسيم الحركة من سكون من الموضع $x=0$ فما هي الإزاحة عند أي لحظة.

الحل :

معادلة الحركة

$$\ddot{x}+4\dot{x}+8x=20\cos 2t \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية عادية خطية من الرتبة الثانية وغير متجانسة حلها هو الإزاحة المطلوبة وهو على الشكل

$$x(t)=x_H(t)+x_p(t) \qquad (2)$$

حيث $x_H(t)$ هو حل المعادلة (2) المتجانسة بينما $x_p(t)$ هو الحل الخاص للمعادلة (1)

١– حل المعادلة المتجانسة :

$$\ddot{x}+4\dot{x}+8x=0 \qquad (3)$$

المعادلة المساعدة للمعادلة (3) هي

$$\lambda^2+4\lambda+8=0 \qquad (4)$$

فإن جذري المعادلة (4) هما

$$\lambda_1,\lambda_2=-2\pm 2i \qquad (5)$$

وعندئذ يكون شكل حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$x_H(t)=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t) \qquad (6)$$

ثانيا نفرض أن الحل الخاص على الصورة

$$x_p(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t \qquad (7)$$

حيث B ، A ، c_1 ، c_2 ثوابت اختيارية تتعين من الشروط الابتدائية، بالتعويض عن $x_p(t)$ في معادلة الحركة نجد أن $c_1 = 1$ ، $c_2 = 2$ وبالتعويض في (7) نحصل على

$$x_p(t) = \cos 2t + 2\sin 2t \qquad (8)$$

وبالتعويض عن $x_H(t)$ ، $x_p(t)$ في المعادلة (2) نجد أن الإزاحة عند اللحظة t هي

$$x(t) = \cos 2t + 2\sin 2t + e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t) \qquad (9)$$

أيضا السرعة عند اللحظة t تكون

$$x(t) = -2\sin 2t + 4\cos 2t + e^{-2t}\left((-2A - 2B)\sin 2t + (2B - 2A)\cos 2t\right) \qquad (10)$$

من الشروط الابتدائية $x = 0$ ، $\dot{x} = 0$ عند $t = 0$ ، وبالتعويض في المعادلتين (9)، (10) ومنهما نستنتج $A = -1$ ، $B = -3$ ، وبالتعويض في المعادلة (9) نجد أن الإزاحة عند اللحظة t هي

$$x(t) = \cos 2t + 2\sin 2t - e^{-2t}(\cos 2t + 3\sin 2t) \qquad (11)$$

٢/٥– تمارين :

١. تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة ارتجاعية مقدارها ky وقوة مقاومة $\mu\dot{y}$ حيث k , μ ثوابت، ky هو بعد النقطة عن مركز الحركة عند أي لحظة فإذا بدأت الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية $\dot{y}_o$ أدرس الحركة.

٢. تتحرك نقطة مادية كتلتها m بتأثير قوة ارتجاعية مقدارها ky وقوة مقاومة مقدارها $2\sqrt{km\dot{x}}$ حيث k، x هي بعد النقطة المادية عن مركز الحركة عند أي لحظة t. أكتب معادلة الحركة واوجد الحل العام لها وبين نوع الحركة.

٣. ادرس الحركة في المسألة السابقة إذا كانت قوة المقاومة $\sqrt{km\dot{x}}$.

٤. كتلة m معلقة في طرف زنبرك والطرف الأخر مثبت وتتحرك الكتلة في وسط مقاومته $c\dot{y}$ وتؤثر على الكتلة أيضاً قوة اضطراب $mf_o\sin\alpha t$ حيث c, f_o, α ثوابت، أدرس الحركة ثم عين شرط الرنين. أدرس أيضاً الحركة إذا كان $c < \sqrt{km}$، حيث k معامل الاستطالة.

٥. تؤثر القوة $mf_o\sin\alpha t$ على كتلة m معلقة في طرف زنبرك في وسط غير مقاوم أدرس الحركة حيث $y = 0$ عند $t = 0$.

٦. تؤثر القوة $mf_oe^{-\alpha t}$ على كتلة m معلقة في طرف زنبرك ثابت معامل مرونته k. ادرس الحركة في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة، أيضا ادرس الحركة في عدم وجود المقاومة.

الفصل الثالث

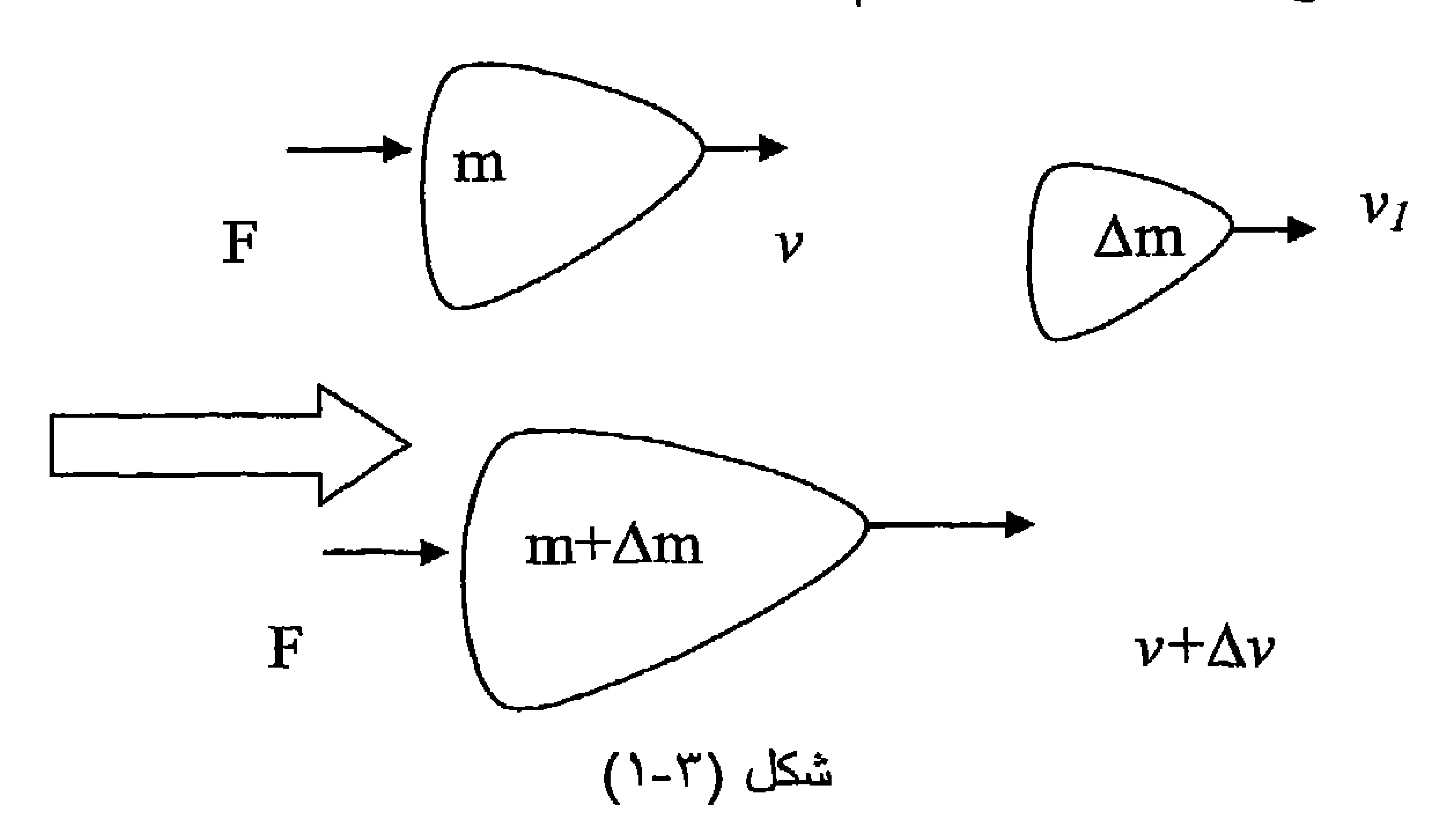
الحركة في خط مستقيم عندما تتغير الكتلة

Motion in a straight line when mass varies

مقدمة :

تقابلنا في الطبيعة بعض الأجسام التى تتغير كتلتها أثناء الحركة فمثلا تغير كتلة قطرات المطر أثناء سقوطها لتجمع القطرات الصغيرة عليها وتتغير كذلك كتلة الجليد العائمة باختلاف درجة الحرارة. وفى مجال التكنولوجيا نجد ان كتلة الصواريخ وكذلك الطائرات النفاثة تتناقص باحتراق الوقود وأمثلة أخرى فى حركة السلاسل والحبال الثقيلة ففي هذه الحالات لايمكن تطبيق الصور السابقة لمعادلة الحركة وهو قانون نيوتن الثاني بل لابد من صورة أخرى لأن قانون نيوتن يطبق على الأجسام ذات الكتل المتغيرة الطاقة.

٣/١- استنتاج معادلة حركة جسم متغير الكتلة :



شكل (٣-١)

نفرض أن مقدار الكتلة المتحركة في اللحظة t هو m وسرعتها v وأن عنصر الكتلة Δm قبل انضمامه إلى الكتلة المتحركة بالسرعة v_1 وأن السرعة $v+\Delta v$ هي سرعة الكتلة $m+\Delta m$ عند اللحظة $t+\Delta t$ وان القوة المؤثرة هي F ثابتة أثناء الحركة وأثناء تصادم الكتلتين $m,\Delta m$ يكون التغير فى كمية حركتها مساويا دفع القوة خلال فترة التصادم وعلى ذلك فان كمية الحركة في اللحظة t تساوي $mv+(\Delta m)v_1$

أيضا كمية الحركة في اللحظة $t+\Delta t$ هي $(m+\Delta m)(v+\Delta v)$

فإن التغير في كمية الحركة خلال الفترة الزمنية Δt و إهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية تساوي $m\Delta v+v\Delta m-(\Delta m)v_1$.

دفع القوة F خلال الفترة الزمنية Δtتساوي مقدار القوة في زمن تأثيرها أي تساوي $F(\Delta t)$، و لكن الدفع في أي اتجاه يساوي التغير في كمية الحركة في نفس الاتجاه أي أن

$$m\Delta v+v\Delta m-(\Delta m)v_1=F(\Delta t)$$

وبقسمة الطرفين علىΔt وأخذ النهاية عندما $\Delta t\to 0$ نحصل على

$$m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}-v_1\frac{dm}{dt}=F \qquad (1)$$

وهى معادلة حركة جسم متغير الكتلة ويمكن وضعها على الصورة التالية

$$\frac{d}{dt}(mv)-v_1\frac{dm}{dt}=F \qquad (2)$$

أيضا يمكن وضع المعادلة (1) على الصور التالية

$$m\frac{dv}{dt}-(v_1-v)\frac{dm}{dt}=F$$

أو

$$m\frac{dv}{dt}-u\frac{dm}{dt}=F \qquad (3)$$

حيث $u=v_1-v$ سرعة الكتلة المنضمة بالنسبة للكتلة الأصلية .

٣/١/١- ملاحظات :

أ. المقادير $\vec{v}$، $\vec{v}_1$، $\vec{F}$ كميات متجهة يجب قياسها جميعا وفى نفس الاتجاه ،

ب. المقدار $\frac{dm}{dt}$ يكون موجبا إذا كانت الكتلة الجسم تتزايد ويكون سالبا إذا كانت كتلة الجسم تتناقص،

ج. ج- السرعة v_1 هي السرعة المطلقة في الفراغ للكتلة Δm وليست سرعته النسبية أما سرعتها النسبية فهي uحيث $u=v_1-v$.

د. د- أذا كانت Δm ساكنة وقت انضمامها إلى الكتلة الأصلية فان $v_1 = 0$ وفى هذه الحالة تكون معادلة الحركة على الصورة $\frac{d}{dt}(mv)=F$

٢/٣-أمثلة :

مثال(١) : تسقط قطرة مطر كروية الشكل نصف قطرها a رأسيا إلى أسفل مبتدئة من السكون تحت تأثير وزنها وسط سحابة ساكنة، فإذا كانت كتلة القطرة تزداد أثناء نزولها بمعدل زمني λ من المرات مساحة سطحها. أوجد سرعة هذه القطرة عند أى لحظة t والمسافة التي تقطعها.

الحل :

نفرض أن القطرة سقطت مسافة y وسرعتها v عند اللحظة t ونصف قطرها r وكتلتها m وحيث إن البخار كان ساكنا لحظة انضمامه للقطرة فان $v_1 = 0$ و تكون معادلة حركة القطرة عند اللحظة t هي

$$\frac{d}{dt}(mv)=F$$

وحيث $F=mg$ القوة المؤثرة فإن

$$\frac{d}{dt}(mv)=mg \qquad (1)$$

و قطرة المطر لروية الشكل فإن $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ حيث $\rho = 1$ هي كثافة الماء فإن

$$m=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (2)$$

من (2) نستنتج أن

$$\frac{dm}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt} \qquad (3)$$

من المعطيات كتلة القطرة تزداد أثناء نزولها بمعدل زمني مرات مساحة سطحها أي أن

$$\frac{dm}{dt} = \lambda(4\pi r^2) \qquad (4)$$

من المعادلتان (3) ، (4) نجد أن

$$\frac{dr}{dt} = \lambda \qquad (5)$$

بفصل المتغيرات في (5) و التكامل نجد أن

$$r = \lambda t + c_1 \qquad (6)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية حيث $r = a$ عند $t = 0$

فإن $c_1 = a$

و بالتعويض عن في (6) نجد أن

$$r = \lambda t + a \qquad (7)$$

بالتعويض من (7) في (2) و منها في (1) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{4\pi}{3}(\lambda t + a)^3 v\right] = \frac{4\pi}{3}(\lambda t + a)^3 g \qquad (8)$$

وبتكامل (8) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\frac{4}{3}(\lambda t + a)^3 v = \frac{g}{3\lambda}(\lambda t + a)^4 + c_2 \qquad (9)$$

حيث c_2 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية حيث $v = a$ عند $t = 0$

فإن $c_2 = -\frac{g a^4}{3\lambda}$ ، و بالتعويض عن c_2 في (9) نجد أن

$$v = \frac{g}{4\lambda}\left[(\lambda t + a) - \frac{a^4}{(\lambda\lambda + a)^3}\right] \qquad (10)$$

المعادلة (10) تمثل سرعة القطرة عند اللحظة t

وهى سرعة القطرة عند اللحظة t ، و لإيجاد المسافة التي تقطعها قطرة المطر و ذلك بتكامل المعادلة (10) بالنسبة للزمن t نحصل على

$$y = \frac{g}{4\lambda}\left[\frac{(\lambda t + a)^2}{2\lambda} + \frac{a^4}{2\lambda(\lambda t + a)^2}\right] + c_3 \qquad (11)$$

حيث c_3 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية حيث $v=0$ عند $t=0$

فإن $c_3=-\frac{ga^2}{4\lambda}$ ، و بالتعويض عن c_2 في (11) نجد أن

$$y=\frac{g}{8\lambda^2}\left[(\lambda t+a)^2+\frac{a^4}{(\lambda t+a)^2}-2a^2\right] \qquad (12)$$

والمعادلة (12) تمثل المسافة التي قطعتها قطرة المطر عند اللحظة t و يمكن كتابة المعادلة (12) على الصورة التالية $y=\frac{gt^2}{8}\left(\frac{\lambda t+2a}{\lambda t+a}\right)^2$

مثال(٢): أعد صاروخ للانطلاق رأسيا إلى أعلى وكانت كتلته الكلية 2m منها m من الوقود فإذا كان الصاروخ يقذف مادته بمعدل ثابت $\frac{m}{40}$ كل ثانية بسرعة نسبية v' رأسيا إلى أسفل فأثبت أن الصاروخ لاينطلق إلا إذا كانت $v'\leq 80g$ وإذا كانت $v'=70g$. فأثبت أن الصاروخ لا ينطلق فورا الا بعد زمن من اشتعال وقوده وأن أقصى سرعة يكتسبها هي : $v=10g\left(\ln\frac{7}{4}-3\right)$ ، حيث g عجلة الجاذبية .

الحل :

نفرض أن الصاروخ بعد زمن t صارت سرعته v وكتلته M شكل(٣-٢) فإن

+

Mg

شكل (٣-٢)

$$\frac{dM}{dt}=-\frac{m}{40} \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات في (1) والتكامل نحصل على

$$M=-\frac{m}{40}t+c_1 \qquad (2)$$

حيث ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية عند $t=0$ كانت $M=2m$

نجد ان $c_1=2m$ ، و بالتعويض عن في (2) نجد ان

$$M=\frac{m(80-t)}{40} \qquad (3)$$

معادلة حركة الصاروخ عند اللحظة t هي

$$M\frac{dv}{dt}-u\frac{dM}{dt}=-Mg \qquad (4)$$

بالتعويض من المعادلة (2) ، (3) في المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{v'}{80-t} \qquad (5)$$

شرط ان الصاروخ لا ينطلق فوراً هو $\frac{dv}{dt}\leq 0$ عند $t=0$ بالتعويض في (5) فإن

$-g+\frac{v'}{80}\leq 0$ و بحل المتباينة نحصل على $v'\leq 80g$ ، و هو المطلوب أولاً.

بوضع $v'=70g$ في المعادلة (5) نجد أن

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{70g}{80-t} \qquad (6)$$

و لإثبات ان الصاروخ لا ينطلق الا بعد 10 sec من اشتعال وقوده، وذلك بوضع العجلة $\frac{dv}{dt}=0$ في (6) أي أن

$$-g+\frac{70g}{80-t}=0 \qquad (7)$$

و بحل المعادلة (7) في t نحصل على $t=10\ \text{sec}$ أي أن الصاروخ ينطلق بعد هذا الزمن من اشتعال وقوده و لإيجاد السرعة عند أي لحظة نعمل على فصل المتغيرات في المعادلة و التكامل نحصل على

$$v=-gt-70g\ln(80-t)+c_2 \qquad (8)$$

حيث c_2 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط ألابتدائية عند $t=10\ \text{sec}$ كانت $v=0$ و من (8) نجد أن $c_2=10+70\ln 70$ ، و بالتعويض عن c_1 في (8) نحصل على سرعة الصاروخ عند إي لحظة t و هي

$$v=g(10-t)+70g\ln\frac{70}{(80-t)} \qquad (9)$$

و أقصى سرعة v_{max} عند زمن نفاذ الوقود و لإيجادها نضع $t=40\ \text{sec}$ في المعادلة (9) نحصل على السرعة القصوى للصاروخ و هي

$$v_{max} = 10g\left(7g\ln\frac{7}{4} - 3\right)$$

مثال(٣): كتلة الوقود الموجودة بداخل صاروخ تساوى نصف كتلته الكلية وتكفى للاشتعال لمدة دقيقتين فإذا كان الوقود يحترق بمعدل ثابت وتخرج غازات الاحتراق بسرعة نسبية مقدارها 6400 ft/sec رأسيا إلى أسفل أثبت أن الصاروخ ينطلق بعد مرور زمن 40 sec من اشتعال وقوده وأن أقصى سرعة يكتسبها الصاروخ تساوى

$$1280\left(5g\ln\frac{7}{4} - 2\right)\text{ft/sec}$$

الحل :

Mg

شكل (٣-٣)

نفرض أن كتلة الصاروخ الكلية هي m_0 ونفرض أن كتلته عند أى لحظة هي M فإن معدل اشتعال الوقود في الثانيه هو

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{m_o}{240} \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات في (1) والتكامل نحصل على

$$M = -\frac{m_o}{240}t + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $M = m_o$

نجد ان $c_1 = m_0$ ، و بالتعويض عن c_1 في (2) نجد ان

$$M = \frac{m_o(240 - t)}{240} \qquad (3)$$

معادلة حركة الصاروخ عند اللحظة t هي

$$M\frac{dv}{dt} - u\frac{dM}{dt} = -Mg \qquad (4)$$

بالتعويض من المعادلة (1) ، (3) في المعادلة (4) نجد أن

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{6400}{240 - t} \qquad (5)$$

و لإثبات ان الصاروخ لا ينطلق إلا بعد 40 sec من اشتعال وقوده، وذلك بوضع العجلة $\frac{dv}{dt}=0$ (5) أي أن

$$-g+\frac{6400}{240-t}=0 \qquad (6)$$

و بحل المعادلة (6) في t نحصل و بالتعويض عن $g = 32\,ft/\sec^2$ نحصل على $t = 40$ sec أي أن الصاروخ ينطلق بعد هذا الزمن من اشتعال وقوده، و لإيجاد السرعة عند أي لحظة نعمل على فصل المتغيرات في المعادلة (5) و التكامل نحصل على

$$v=-32t-6400\ln(240-t)+c_2 \qquad (7)$$

حيث c_2 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الإبتدائية عند $t = 40$ sec كانت $v = 0$ و من (7) نجد أن $c_2 = 1280+6400\ln 200$ ، و بالتعويض عن c_2 في (7) نحصل على سرعة الصاروخ عند إي لحظة t و هي

$$v=32(40-t)+6400g\ln\frac{200}{(240-t)} \qquad (8)$$

و أقصى سرعة v_{max} عند زمن نفاذ الوقود و لإيجادها نضع $t = 120$ sec في المعادلة (8) نحصل على السرعة القصوى للصاروخ وهي

$$v_{max}=1280\left(5g\ln\frac{5}{3}-2\right)$$

مثال(٤): الكتلة الكلية للصاروخ بما فيه من وقود تساوى m_0 ويشتعل وقوده بمعدل ثابت km_0 في الثانية وتنبعث غازات الاحتراق من مؤخرته بسرعة نسبية ω رأسيا إلى أسفل. إذا كانت m' هي كتله الغلاف وما بة من معدات ، m_1 كتله الوقود في البداية، برهن أن

أولاً: لا يمكن أن يرتفع الصاروخ في الحال إلا إذا كانت $k\omega>g$

ثانيا: لا يمكن أن يرتفع الصاروخ بالمرة بعد نفاذ الوقود إلا إذا كان $km_0\omega>m'g$

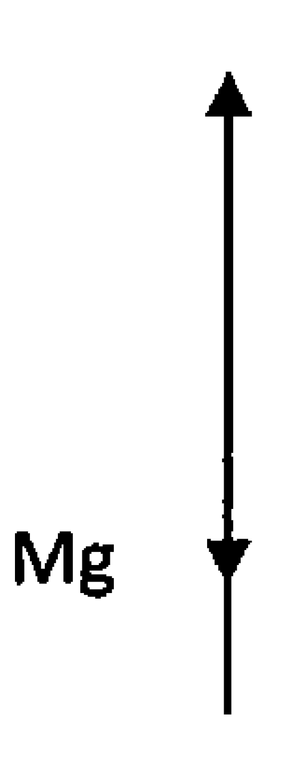
ثالثا: إذا انطلق الصاروخ فان أقصى سرعة يكتسبها هي

$$v_{max} = \omega \ln \frac{m_o}{m'} - \frac{m'g}{k m_o}$$

وان أقصى ارتفاع يصل إلية هو

$$y = \frac{\omega^2}{2g}\left(\ln\left(\frac{m_o}{m'}\right)\right) + \frac{\omega}{k}\left(\frac{m_1}{m_o} - \ln\frac{m_o}{m'}\right)$$

الحل :



شكل (٣-٤)

نفرض أن M هي كتلة الصاروخ وما به من معدات ووقود و سرعته v عند اللحظة t شكل (٣-٤)، فإن معدل اشتعال الوقود في الثانيه هو

$$\frac{dM}{dt} = -k m_o \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات في (1) والتكامل نحصل على

$$M = -m_o k t + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية عند $t=0$ كانت $M=m_o$

نجد ان $c_1 = m_o$ ، و بالتعويض عن c_1 في (2) نجد ان

$$M = m_o(1-kt) \qquad (3)$$

ايضا الزمن اللازم لكي يحترق الوقود بأكمله هو

$$t_1 = \frac{m_1}{k m_o} \qquad (4)$$

معادلة حركة الصاروخ عند اللحظة t هي

$$M\frac{dv}{dt}+\omega\frac{dM}{dt}=-Mg \qquad (5)$$

بالتعويض من المعادلة (1) ، (3) في المعادلة (5) نجد أن

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{\omega k}{1-kt} \qquad (6)$$

و تكون عجلة الصاروخ الابتدائية (أي عند $t=0$) تساوي من المعادلة (5)

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=-g+\omega k \qquad (7)$$

و لكي يرتفع الصاروخ في الحال أي لحظة بدء احتراق الوقود يجب أن تكون العجلة الابتدائية تزايدية أي يجب أن يتحقق الشرط من المعادلة (7) و هو

$$k\omega > g \qquad (8)$$

وأيضا تكون عجلة الصاروخ عند لحظة نفاذ الوقود (أي عند $t=t_1$) تساوي

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_1}=\frac{k\omega\, m_o}{m'}-g \qquad (9)$$

و لا ينطلق الصاروخ إطلاقا إلا إذا كانت عجلة الصاروخ عند $t=t_1$ موجبة أي أن

$$k\omega\, m_o > m'g \qquad (10)$$

و إذا تحقق الشرط (8) فإن الصاروخ ينطلق فوراً لحظة بدء اشتعال الوقود، و بفصل المتغيرات و التكامل للمعادلة (6) نحصل على

$$v=-gt-\omega\ln(1-kt)+c_2 \qquad (11)$$

حيث c_2 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط ألابتدائية عند $t=0$ كانت $v=0$ و من (11) نجد أن $c_2=0$ ، و بالتعويض عن c_2 في (11) نحصل على سرعة الصاروخ عند أي لحظة و هي

$$v=-gt-\omega\ln(1-kt) \qquad (12)$$

و أقصى سرعة v_{max} عند زمن نفاذ الوقود و لإيجادها نضع $t = t_1$ في المعادلة (12) نحصل على السرعة القصوى للصاروخ و هي

$$v_{max} = -\frac{m_1}{k m_o} g - \omega \ln\left(1 - \frac{m_1}{m_o}\right) \qquad (13)$$

و يمكن وضع السرعة القصوى للصاروخ على الصورة التالية حيث $m_o = m_1 + m'$

$$v_{max} = -\frac{m_1}{k m_o} g + \omega \ln\left(\frac{m_o}{m'}\right) \qquad (14)$$

و لإيجاد المسافة الرأسية عند أي لحظة t نكامل المعادلة (11) بالنسبة للزمن t نحصل على

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 - \omega t \ln(1-kt) + \omega t + \frac{\omega}{k} \ln(1-kt) + c_3 \qquad (15)$$

حيث c_3 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $y = 0$ و من (15) نجد أن $c_3 = 0$، و بالتعويض عن c_3 في (15) نحصل على

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \omega t + \frac{\omega}{k} (1-kt) \ln(1-kt) \qquad (16)$$

و بالتعويض عن $t = t_1$ في (16) نحصل على المسافة y_1 التي قطعها الصاروخ حتى لحظة نفاذ الوقود وهي

$$y_1 = -\frac{g m_1^2}{2 m_o^2 k^2} + \frac{\omega m_1}{k m_o} + \frac{\omega}{k}\left(1 - \frac{m_1}{m_o}\right) \ln\left(1 - \frac{m_1}{m_o}\right) \qquad (17)$$

وحيث $m_o = m_1 + m'$، لذلك يمكن وضع المعادلة (17) على الصورة التالية

$$y_1 = -\frac{g m_1^2}{2 m_o^2 k^2} + \frac{\omega}{k m_o}\left(m_1 + m' \ln\left(\frac{m'}{m_o}\right)\right) \qquad (18)$$

ويتحرك الصاروخ بعد ذلك تحت تأثير وزنه فقط بسرعة ابتدائية مقدارها v_{max} حتى يسكن لحظيا ويكون قد ارتفع مسافة أخرى y_2 حيث $y_2 = \frac{v_{max}^2}{2g}$ ، يكون أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ من نقطة القذف تساوى $H = y_1 + y_1$

مثال(٥) : وضعت سلسلة على منضدة أفقية كتلة وحدة الاطوال ρ فإذا ربطت كتلة m في طرفي السلسلة وقذفت الكتلة بسرعة أفقية v_0 فأثبت أن سرعة السلسلة (والكتلة) عند انفراد طول x منها تساوى $\frac{mv_0}{m+\rho x}$ وأن الكتلة m تتحرك كما لو كانت واقعة تحت تأثير قوة تتناسب عكسيا مع مكعب المسافة التى تقطعها من نقطة ثابتة على نفس الخط المتحركة علية، أثبت أن معدل فقدان طاقة الحركة يتناسب مع مكعب سرعة m .

الحل :

شكل (٣-٥)

عندما تتحرك الكتلة m مسافة x فان طولا من السلسلة قدرة x ينفرد متحركاً بالسرعة v فإذا كانت وحدة الأطوال هي ρ فان كتلة هذا الطول هي ρx وأن الكتلة الكلية M عند اللحظة t هي

$$M = m + \rho x \qquad (1)$$

ولإيجاد معدل الزيادة في الكتلة المكتسبة M في وحدة الزمن نفاضل (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\frac{dM}{dt} = \rho v \qquad (2)$$

معادلة الحركة هي

$$M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt} - v_1\frac{dM}{dt} = F \qquad (3)$$

و بالتعويض من (1) و (2) و $F = 0$ ، $v_1 = 0$ في (3) نحصل على

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\rho v^2}{m+\rho x} \qquad (4)$$

و لإيجاد العلاقة بين السرعة و الازاحة نضع $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ في (4) و فصل المتغيرات و التكامل نحصل على

$$\ln v=-\ln(m+\rho x)+c_1 \qquad (5)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط ألابتدائية عند $t=0$ كانت $x=0$ ، $v=v_o$ و بالتعويض في (5) نجد أن $c_1=\ln(mv_o)$ و بالتعويض في (5) نجد أن

$$\ln v=\ln\frac{mv_o}{m+\rho x} \qquad (6)$$

وباستخدام خواص اللوغاريتمات يمكن وضع المعادلة (6) على الصورة التالية

$$v=\frac{mv_o}{m+\rho x} \qquad (7)$$

المعادلة (7) هي سرعة السلسلة و الكتلة عند انفراد طول x منها ، و هو المطلوب اولاً. بالتعويض من (7) في (4) نجد أن

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\rho m^2 v_o^2}{(m+\rho x)^3} \qquad (8)$$

وبوضع $\frac{m}{\rho}=a$ يمكن وضع المعادلة (8) على الصورة

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{a^2 v_o^2}{(a+x)^3} \qquad (9)$$

X
o′ a o x

شكل (٣-٦)

أيضا بوضع $X=x+a$ في المعادلة (9) نجد أن

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{a^2 v_o^2}{X^3} \qquad (10)$$

حيث أن a , v_o ثابتان فإن من (10) نستنتج أن $\frac{dv}{dt}\propto -\frac{1}{X^3}$ أي أن حركة الكتلة m كما لو كانت تحت تأثير قوة نحو مركز جاذب o' على بعد a من نقطة بدأ الحركة حيث $a=oo'$ و تتناسب مع مكعب البعد عن o' ، أنظر الشكل (٣-٦) .

أيضا معدل طاقة الحركة تساوي

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m+\rho x)\, v^2\right]=v(m+\rho x)\frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}\rho v^2 \frac{dx}{dt}$$

بالتعويض من (8) عن $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m+\rho x)\, v^2\right]=v(m+\rho x)\left(-\frac{\rho m^2 v_o^2}{(m+\rho x)^3}\right)+\frac{1}{2}\rho v^2 \frac{dx}{dt}$$

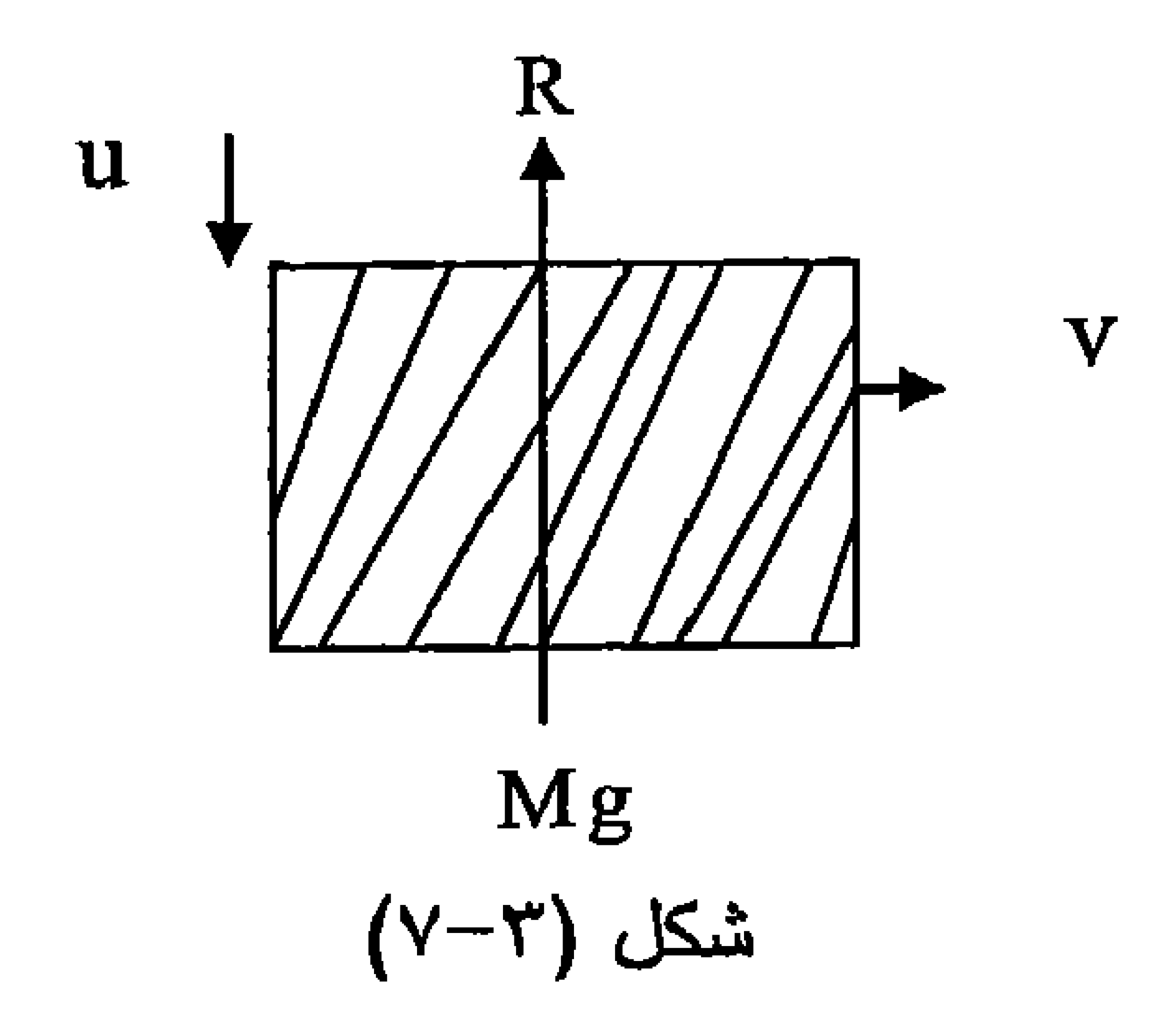
و باستخدام (7) نستنتج أن

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m+\rho x)\, v^2\right]=-\rho v^3+\frac{1}{2}\rho v^3=-\frac{1}{2}\rho v^3$$

أي أن معدل فقدان طاقة الحركة يتناسب مع مكعب سرعة الكتلة m .

مثال (٦) : تنزلق عربة سكة حديد مفتوحة كتلتها M_o على قضبان أفقية ملساء بسرعة أفقية v_o إذا بدا المطر في السقوط بسرعة u رأسيا إلى أسفل داخل العربة بمعدل k برهن أن المسافة التي تقطعها العربة بعد زمن t من زمن سقوط المطر تساوى $\frac{M_o v_o}{2}\ln\left(1+\frac{kt}{M_o}\right)$.

الحل :



شكل (٣-٧)

نفرض أن كتلة العربة بما فيها من مطر بعد مضى زمن t من سقوط المطر هي M، v سرعتها إذا كانت u هي سرعة المطر النسبية الرأسية ، أنظر الشكل (٣-٧) فإن معادلة الحركة العربة عند اللحظة t هي

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v})-\vec{u}\frac{dM}{dt}=\vec{F} \qquad (1)$$

باعتبار $\vec{i},\vec{j}$ هما متجهي الوحدة في اتجاهي الأفقي والراسي فان معادلة الحركة الاتجاهية

$$\frac{d}{dt}(Mv\vec{i})-u\frac{dM}{dt}\vec{j}=(Mg-R)\vec{j} \qquad (2)$$

حيث R رد الفعل المحصل و من المعادلة نستنتج

$$\frac{d}{dt}(Mv)=0 \qquad (3)$$

$$-u\frac{dM}{dt}=Mg-R \qquad (4)$$

و حيث أن المطر يسقط بمعدل ثابت k أي أن

$$\frac{dM}{dt}=k \qquad (5)$$

بفصل المتغيرات في و التكامل نحصل على

$$M=kt+c_1 \qquad (6)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $M = M_o$ و بالتعويض في المعادلة (6) نجد أن $c_1 = M_o$ و بالتعويض عن c_1 في (6) تكون

$$M = kt + M_o \tag{7}$$

و لإيجاد R رد الفعل نعوض من (5) و (7) في (4) يكون

$$R = (kt + M_o)g + ku \tag{8}$$

و لإيجاد سرعة العربة من (3) بفصل المتغيرات و التكامل نجد ان

$$M v = c_2 \tag{9}$$

حيث c_2 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $M = M_o$ و $v = v_o$ نجد أن $c_2 = M_o v_o$ ، و بالتعويض عن الثابت c_2 في المعادلة (9) نحصل على سرعة العربة على الصورة

$$M v = M_o v_o \tag{10}$$

و المعادلة (10) تمثل سرعة العربة عند اللحظة t و لإيجاد المسافة التي تقطعها العربة بعد مضي زمن t من لحظة سقوط المطر تكامل طرفي المعادلة (10) بالنسبة إلي t

$$x = \frac{v_o M_o}{k} \ln(M_o + kt) + c_3 \tag{11}$$

حيث c_3 ثابت التكامل يمكن تعينه من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $x = 0$ ونجد أن $c_3 = -\frac{M_o v_o}{k} \ln M_o$ ، و بالتعويض عن الثابت c_3 في المعادلة (11) نحصل على المسافة التي تقطعها العربة بعد مضي الزمن t على الصورة

$$x = \frac{v_o M_o}{k} \ln \frac{(M_o + kt)}{M_o} \quad \text{أي أن} \quad x = \frac{v_o M_o}{k} \ln\left(1 + \frac{kt}{M_o}\right).$$

٣/٣- تمارين :

١. صاروخ كتلته $3m$ منها $2m$ من الوقود تكفى للاشتعال لمدة دقيقة واحدة فإذا كان الصاروخ يقذف بانتظام هذه المادة بسرعة نسبية $75g$ راسيا لأسفل فأثبت أن الصاروخ لا ينطلق إلا بعد $15sec$ من بدء اشتعاله وان أقصى سرعة يكتسبها هي $v_{max} = 15g\left(5\ln\frac{5}{2} - 3\right)$ ، حيث g عجلة الجاذبية الارضية.

٢. أعد صاروخ راسيا إلى أعلي وكانت كتلته الكلية m_o وكتلة ما به من وقود تساوى $\frac{m_o}{2}$ ، فإذا كان الوقود يحترق بمعدل $\frac{m_o}{n}$ كل ثانية وتنبعث الغازات من مؤخرته بسرعة نسبيه ng راسيا إلى أسفل إذا انطلق الصاروخ فور اشتعال الوقود برهن أن أقصى سرعة يكتسبها تساوى $v_{max} = ng\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ ، وان أقصى ارتفاع يصل إليه هو $\frac{1}{2}n^2g\,(1 - \ln 2)^2$ حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية.

٣. الكتلة الكلية لصاروخ بما فيه من وقود تساوى m_o ويحترق الوقود بمعدل ثابت k في الثانية وتنبعث غازات الاحتراق بسرعة نسبية ω بدأ الصاروخ الحركة من السكون في الاتجاه الأفقي وأصبحت سرعته v بعد مضى زمن t ، إذا أهملت الجاذبية الأرضية وتعرض لمقاومه F برهن أن $\frac{dv}{dt} = \frac{k\omega - F}{m_o - kt}$ وإذا كانت $F = \lambda v$ أثبت أن $\frac{v^2}{a^2} = \left(1 - \frac{kt}{m_o}\right)^{\frac{\lambda}{k}}$ ، وإذا كانت $F = \lambda v^2$ أثبت أن $\frac{a+v}{a-v} = \left(1 - \frac{kt}{m_o}\right)^{-\frac{2\omega}{a}}$ حيث $a^2 = \frac{k\omega}{\lambda}$.

٤. أعد صاروخ للانطلاق رأسيا إلى أعلى وكانت كتلته الكلية $2m$ منها m من الوقود وكان الصاروخ يقذف مادته بمعدل ثابت $\frac{2m}{\lambda}$ كل ثانية بسرعة نسبيه λg رأسيا

إلـى أسـفل أثبـت أن أقصـى سـرعة يكتسبها الصـاروخ هـي $\lambda g\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$ وأن أقصـى ارتفـاع يصـل إليـه هـو $\frac{1}{2}\lambda^2\ (1-\ln 2)^2$ حيـث g هـي عجلـة الجاذبيـة الأرضية.

٥. أعد صاروخ للانطلاق رأسيا إلى أعلى وكانت كتلته الكلية 2m منها m من الوقود وكـان الصـاروخ يقذف مادتـه بمعدل ثابـت $\frac{m}{50}$ كـل ثانيـة بسـرعة نسـبيه رأسـيا 100g إلـى أسفل فأثبت أن الصـاروخ ينطلق فورا بمجرد اشتعال وقوده وان أقصـى سـرعة يكتسـبها الصـاروخ هـي $50g\ (\ln 2-1)$ حيـث g هـي عجلـة الجاذبيـة الأرضية

٦. صـاروخ كتلته الكلية 5m منهـا 2m من الوقـود تكفى للاشـتعال لمـدة دقيقـة واحـده وتنطلـق الغـازات الناتجـة مـن اشـتعال الوقـود بسـرعة v' رأسـيا إلـى أسـفل بالنسـبة للصـاروخ. أثبت أن الصاروخ ينطلق فورا أذا كانت $v'\geq 150g$ وإذا كانت $v'=125g$ فأثبت أن الصـاروخ لا ينطلـق إلا بعـد زمـن. 25 sec من بدء اشتعال الوقـود، وأن أقصـى سرعة يكتسبها هي $5g\left(25\ln\frac{25}{18}-7\right)$.

٧. قطرة مطر على شكل كرة نصف قطرها a تسقط من السكون من ارتفاع قدره h عن سطح الأرض فـإذا كـان بخـار المـاء السـاكن يتكـاثف علـى قطـرة المطـر أثنـاء حركتهـا λ جـم/سـم/ ثانيـة. والقوة الراسـية الوحيـدة التـي تعمـل هـي قـوة الجاذبيـة الأرضـية فاثبـت أن نصـف قطـر قطـرة المطـر عنـد وصـولها إلـى سـطح الأرض يساوى $\lambda\sqrt{\frac{2\lambda}{g}}\left(1+\sqrt{1+\frac{ga^2}{2\lambda^2}}\right)$.

٨. سلسلة ثقيلة أو خيط غير مرن غير مقاومته على طرف نضد ارتفاعه h إذا تدلى جزء ضئيل من طرف الخيط خارج النضد وترك ليسقط فأوجد الزمن الذي يصل فيه الطرف الأخر للخيط إلى الأرض.

٩. مدفع رشاش كتلته m_1 به طلقات كتلتها m_2 يطلقها بمعدل μ كل ثانية بسرعة v_1 بالنسبة إلـى الأرض أثبـت أن السـرعة الخلفيـة للمـدفع عنـدما ينفـذ جميـع مـا بـه مـن

طلقات هي $\mu g \dfrac{(m_1+m_2)^2-m_1^2}{2m\, m_1} - v \dfrac{m_2}{m_1}$ ، حيث معامل الاحتكاك بين الارض و المدفع عجلة الجاذبية الارضية.

١٠. تتحرك أسطوانة نصف قطر قاعدتها a في اتجاه يوازى محورها غير متأثرة بأية قوه وتخترق سحابة متجانسة من غبار ساكن كثافته ρ الحجمية فإذا كان الغبار الذي يلاقى الاسطوانة يلتصق بها وكانت M هي الكتلة و v_1 هي السرعة عند بدء الحركة فأثبت أن المسافة التي تقطعها الاسطوانة في زمن t تعينها المعادلة

$$\left(M+\rho\pi a^2 x\right)^2 = M^2 + 2\pi\pi v_1 a^2 M t$$

الفصل الرابع

الحركــة المقيـــدة

Restricted Motion

مقدمة :

فـي دراستنا السابقة لحركة نقطة مادية استخدمنا الاحداثيات الكارتيزية (x,y)، ثم بعد ذلك الإحداثيات القطبية (r,θ) ، في هذا الباب سنتناول حركة النقطة المادية عندما تكون الحركة مقيدة على منحنى أو سطح معلوم وهذه تسهل دراستها باستعمال ما يسمى بالإحداثيات الذاتية Intrinsic.

نفرض أن o نقطة ثابتة على منحنى ما، P أي نقطة على المنحنى بعدها القوسي عند o هو s، نفرض أن PT هو اتجاه المماس عند نقطة P في اتجاه تزايد s، ψ هي الزاوية التي يصنعها المماس PT مع خط ثابت في المستوى وبذلك يمكن تحديد موضع النقطة P بدلالة الإحداثيات (s,ψ) وتسمى هذه الإحداثيات بالاحداثيات الذاتية للنقطة P على المنحنى، وتسمى العلاقة بين s، ψ بالمعادلة الذاتية وهي $r=f(\psi)$ للمنحني ويلاحظ أن s يمكن أن تكون موجبة أو سالبة كما هو الحال في الاحداثيات الكارتيزية وكذلك لقياس الزاوية ψ يطبق عليها نفس القواعد أنظر شكل (١-٤).

شكل (٤-١)

١/٤: مركبات السرعة والعجلة :

٤/١/١– السرعة :

نعتبر حركة نقطة مادية على منحنى مستوي مثل $\widehat{oP}$، نفرض أن $P(s,\psi)$ موضـع النقطة عند أي لحظة t، وباعتبار متجهي الوحدة $\bar{i},\bar{j}$ في اتجاهي اتجاهي PT والعمودي عليه عند P

شكل (٤-٢)

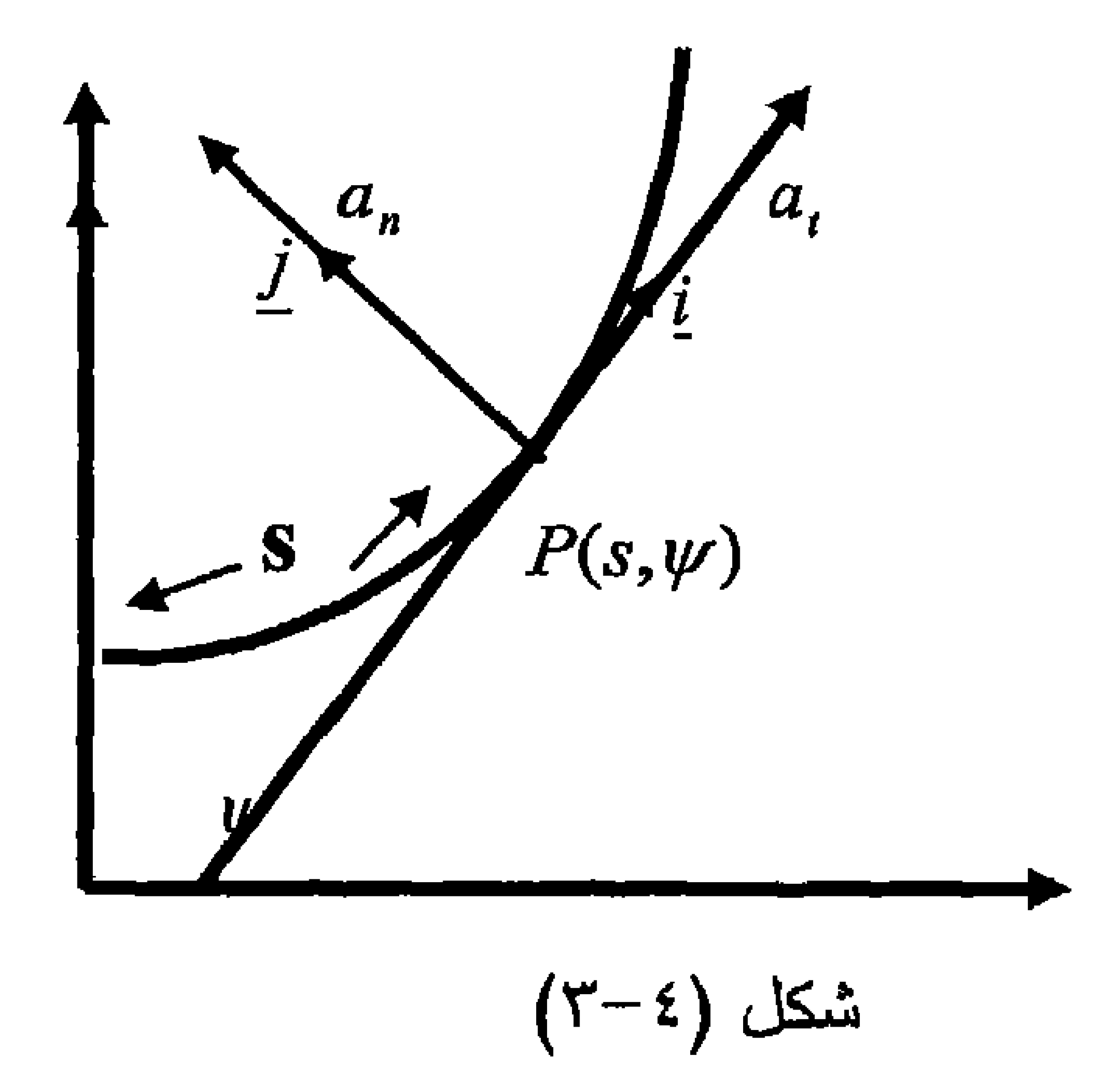
الترتيب كما في شكل (٤-٢) فإن سرعة النقطة المادية $P(s,\psi)$ عند اللحظة t هو معدل تغير المسافة القوسية s بالنسبة للزمن وفي اتجاه المماس عند $P(s,\psi)$ أي أن

$$\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{i} \qquad (1)$$

أي أن $v=\dot{s}$ سرعة النقطة المادية على المنحنى وتعمل في اتجاه المماس عند النقطة $P(s,\psi)$ ، حيث $\vec{j},\vec{i}$ متجهي الوحدة في اتجاه المماس عند P و العمودي عليه.

٢/١/٤- مركبتي العجلة :

لإيجاد مركبتا عجلة النقطة المادية في اتجاهي المماس على المنحنى و العمودي عليه للداخل نلاحظ من (1)، أنظر شكل (٤-٣)



شكل (٤-٣)

$$\vec{v}=\frac{ds}{dt}\vec{i} \qquad (2)$$

من (2) نستنتج أن متجه العجلة $\vec{a}$ هو

$$\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{i}+\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} \qquad (3)$$

ولكن $\frac{d\vec{i}}{dt}=\dot{\psi}\vec{j}$ ، بالتعويض في (3) نجد أن

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{i} + \frac{ds}{dt}\dot{\psi}\vec{j} \qquad (4)$$

من (4) نستنتج أن المركبة المماسية للعجلة a_t tangential component هي

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \qquad (5)$$

والمركبة العمودية للعجلة للداخل a_n Normal component هي

$$a_n = \frac{ds}{dt}\dot{\psi} = v\frac{d\psi}{dt} = v\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \qquad (6)$$

حيث $\rho = \frac{ds}{d\psi}$ يسمى نصف قطر التقوس، و يكون متجه العجلة هو

$$\vec{a} \equiv \left(\ddot{s}, \frac{v^2}{\rho}\right) \qquad (7)$$

لاحظ أن المركبة العمودية a_n للعجلة تكون دائماً للداخل وأن المركبة المماسية للعجلة في اتجاه تزايد البعد القوسي s.

٤/٢- بعض العلاقات الهندسية التفاضلية:

في هذا البند سوف نوجد بعض العلاقات الهندسية التي تربط بين الإحداثيات الكارتيزية و الإحداثيات الذاتية و أيضا إيجاد نصف قطر التقوس بمعلومية المعادلة الكارتيزية ا للمنحنى و إيجاد نصف قطر التقوس بمعلومية المعادلة الذاتية.

شكل (٤-٤)

٤/٢/١- العلاقة بين المسافة القوسية و الاحداثيات الكارتيزية

إذا كانت ψ هي الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $y = f(x)$ مع الاتجاه لمحور السينات فإن ميل المماس عند أي نقطة(x , y) هو

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

ومن الشكل

$$\left(\overline{P}_1\overline{P}_2\right)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

ومنها نجد أن

$$\frac{\left(\overline{P}_1\overline{P}_2\right)^2}{(\Delta s)^2} = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta s)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta s)^2} \qquad (2)$$

وعندما فيكون $\Delta y \to 0, \Delta x \to 0$ فإن $\Delta s \to 0$ نستنتج من (2) أن فإن

$$1 = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta s)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta s)^2}\right) \qquad (3)$$

و من (3) نستنتج

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$s = \int \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx + c_1 \qquad (4)$$

أيضاً يمكن كتابة (2) على الصورة

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad (5)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$s = \int \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\, dy + c_2 \qquad (6)$$

العلاقتان (4)،(6) تعطيان طول المنحنى s إذا علمت معادلة المنحنى الكارتيزية.

٤/٢/٢- نصف قطر التقوس إذا علمت معادلة المنحنى الذاتية :

من الشكل (٤-٤) يمكن تعريف مركز التقوس بأنه نهاية موضع النقطة D عند نقطة من نقطة P_1 ويعرف الطول DP_1 بنصف قطر التقوس ρ، فمن الشكل (٤-٤) يمكن استنتاج أن:

$$\Delta s = DP_1 (\Delta\psi) \qquad (1)$$

و بقسمة طرفي العلاقة (1) على $\Delta\psi$ و أخذ النهاية عند $\Delta\psi \to 0$ نحصل على

$$\rho = \lim_{\Delta\psi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\psi} = \frac{ds}{d\psi} \qquad (2)$$

هذه العلاقة تعطي نصف قطر التقوس إذا علمت المعادلة الذاتية $s = f(\psi)$.

٤/٢/٣- نصف قطر التقوس إذا علمت معادلة المنحنى الكارتيزية :

حيث إن ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى شكل (٤-٤) هو

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

وبتفاضل طرفي (1) بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\psi \frac{d\psi}{dx} = \left[1 + \tan^2\psi\right] \frac{d\psi}{dx} \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نستنتج أن

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{y''(x)}{\left[1 + (y')^2\right]} \qquad (3)$$

و من تعريف نصف قطر التقوس $\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\psi}$ و بالتعويض من (3) و $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ نحصل على نصف قطر التقوس بمعلومية المعادلة الكارتيزية على الصورة

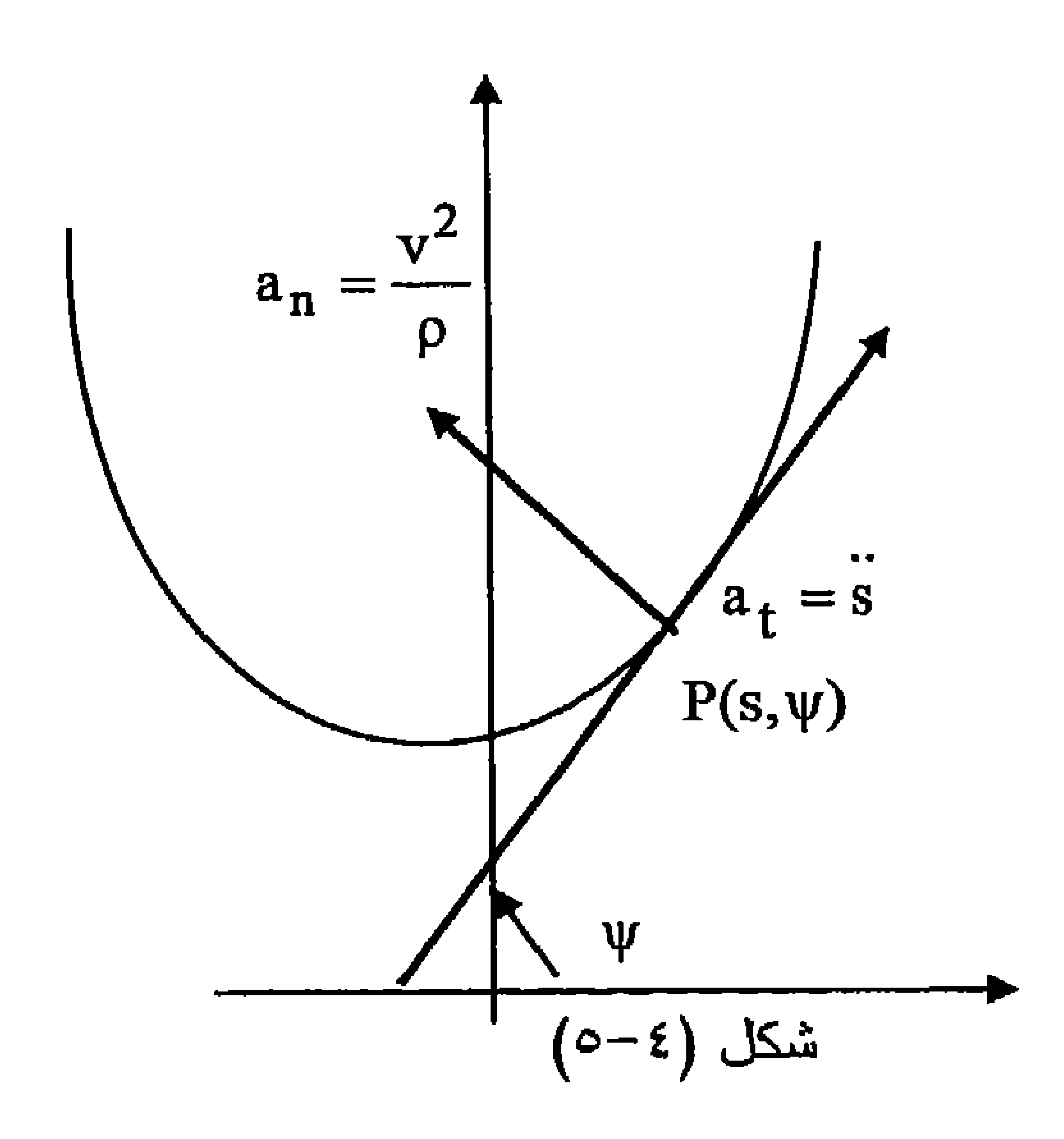
$$\rho = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[1 + (y')^2\right]} \qquad (4)$$

٤/٣- أمثلة :

مثال (١): يتحرك جسيم على منحنى السلسلة (الكتينة) التي معادلتها الذاتية $s = \tan\psi$، يدور المماس بسرعة زاوية ثابتة ω. برهن أن مقدار عجلة الجسيم عند أي موضع تساوي

$\rho\omega^2\left(\frac{4\rho}{c}-\frac{1}{3}\right)$، حيث ρ نصف قطر الانحناء للمنحنى واتجاهها يصنع زاوية θ حيث $\tan\theta=\frac{1}{2}\cot\psi$

الحل :



شكل (٤-٥)

حيث مركبتي العجلة المماسية و العمودية هما

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}\quad,\quad a_t=\ddot{s} \tag{1}$$

المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة هي:

$$s=c\tan\psi \tag{2}$$

ومنها نستنتج أن نصف قطر التقوس

$$\rho=c\sec^2\psi \tag{3}$$

سرعة الجسيم عند اللحظة t هي

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} \tag{4}$$

حيث $\frac{d\psi}{dt}=\omega$ وبالتعويض من (3) نحصل على

$$v=c\omega\sec^2\psi \tag{5}$$

من (5) نجد أن المركبة المماسية للعجلة هي

$$a_t = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = 2c\omega^2 (\sec\psi)^2 \tan\psi \qquad (6)$$

أيضاً بالتعويض من (3)، (6) في (1) نجد أن المركبة العمودية للعجلة هي

$$a_n = \frac{c^2 \omega^2 (\sec\psi)^4}{c(\sec\psi)^2} = c\omega^2 (\sec\psi)^2 \qquad (7)$$

ومن (5)، (7) نحصل على مقدار العجلة وهو

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{4c^2 \omega^4 (\sec\psi)^4 (\tan\psi)^2 + c^2 \omega^4 (\sec\psi)^4}$$

$$= c\omega^2 (\sec\psi)^2 \sqrt{4(\tan\psi)^2 + 1} = c\omega^2 (\sec\psi)^2 \sqrt{4(\sec\psi^2 - 1) + 1}$$

$$= \omega^2 \rho \sqrt{\frac{4\rho}{c} - 3}$$

وتصنع العجلة زاوية θ مع المماس حيث

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{c\omega^2 \sec^2\psi}{2c\omega^2 \sec^2\psi \tan\psi}$$

أي أن

$$. \tan\theta = \frac{1}{2}\tan\psi$$

مثال (٢): تتحرك نقطة مادية على منحنى بحيث كانت العلاقة بين السرعة v والازاحة القوسية s تعطي من العلاقة $2as = \ln\frac{b + ac^2}{b + av^2}$ حيث a, b ثابتان. أوجد القوة المماسية التي تؤثر على النقطة المتحركة والزمن الذي يمضي بين بدء الحركة حتى تكون السرعة v . ثم استنتج v بدلالة الزمن t.

الحل :

$$2as = \ln\frac{b + ac^2}{b + av^2} \qquad (1)$$

القوة المماسية هي

$$F_t = m\ddot{s} \qquad (2)$$

بأخذ e الطرفين للعلاقة (1) نحصل على

$$b + a v^2 = (b + a c^2) e^{-2as} \qquad (3)$$

بتفاضل طرفي العلاقة (3) بالنسبة الي t نجد أن

$$\frac{dv}{dt} = -(b + a c^2) e^{-2as} \qquad (4)$$

من العلاقة (4) و باستخدام (3) نحصل علي العجلة المماسية على الصورة التالية

$$\ddot{s} = \frac{dv}{dt} = -(b + a v^2) \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) في (2) نجد أن القوة المماسية هي

$$F_t = -m(b + a v^2) \qquad (6)$$

و لإيجاد العلاقة بين السرعة و الزمن t و ذلك بفصل المتغيرات في (5) والتكامل $\int \frac{dv}{b + a v^2} = -\int dt$ نحصل على

$$\frac{1}{a\sqrt{k}} \tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{k}} = -t + c_1 \qquad (7)$$

حيث $k = \sqrt{\frac{b}{a}}$ و c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، عند $s = 0$ فإن

من (1) $1 = \frac{b + a c^2}{b + a v^2}$ و منها نستنتج أن $v = c$ عند $t = 0$ و من (7) نجد أن

$$c_1 = \frac{1}{ak} \tan^{-1} \frac{c}{k} \qquad (8)$$

و بالتعويض عن الثابت c_1 من (8) في (7) نجد أن

$$t = \frac{1}{ak} \left(\tan^{-1} \frac{c}{k} - \tan^{-1} \frac{v}{k} \right) \qquad (9)$$

و المعادلة (9) نستنتج أن سرعة النقطة المادية بدلالة الزمن هي

$$v = \frac{k\left[c - k\tan(ak\,t)\right]}{c\tan akt + k} \qquad (10)$$

٤/٤- مبدأ الشغل والطاقة Principle of work and energy :

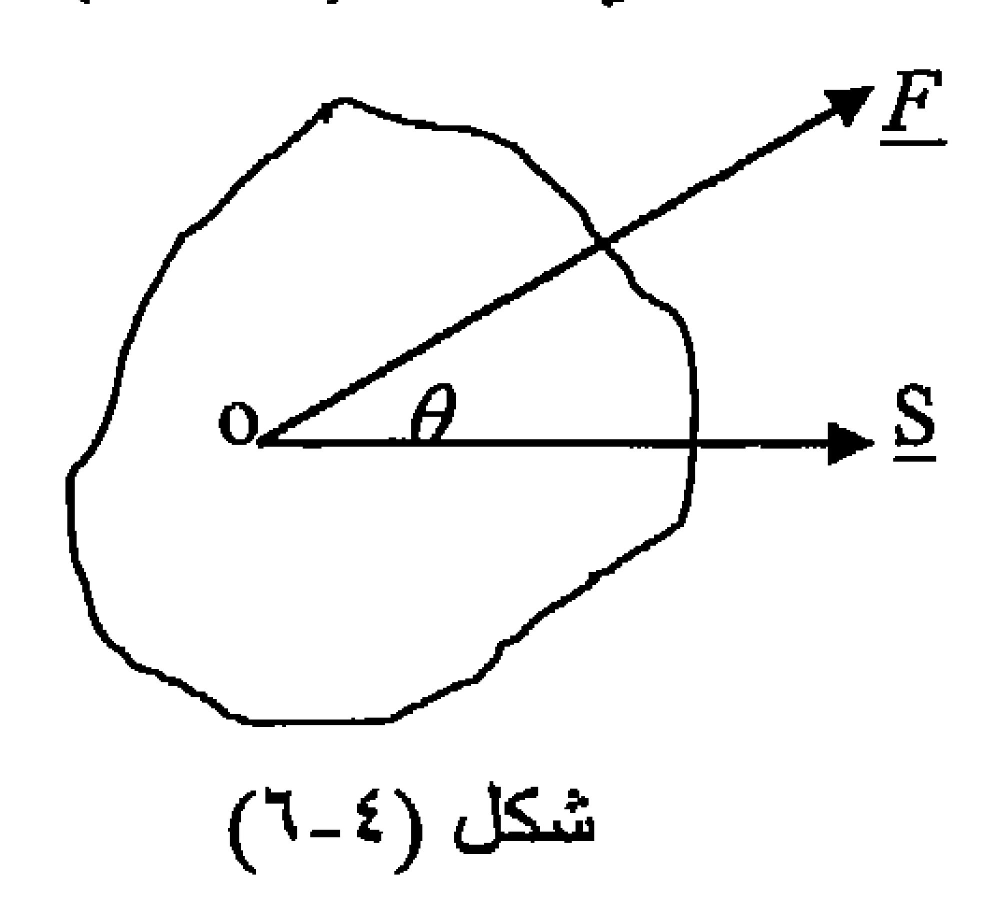
إذا أثرت قوة في جسم فازاحته من موضعه فإنه يقال بأن هذه القوة قد بذلت شغلاً ولحساب الشغل الذي تبذله قوة ما يجب مراعاة ما إذا كانت القوة ثابته أو متغيرة أثناء الحركة و هذا ما سنتناوله في هذا البند.

٤/٤/١- إذا كانت القوة ثابتة أثناء الحركة :

إذا أثرت قوة ثابته F في جسم ما وأزاحته مسافة s فإن الشغل الذي تبذله القوة ويرمز له بالرمز W ويعرف على أنه

الشغل= القوة الفعاله ×الازاحة

بحيث تكون القوة في اتجاه المسافة أي أن $W = (F\cos\theta)S$



شكل (٤-٦)

حيث θ الزاوية المحصورة بين F و S كما في الشكل (٤-٦)

و باستخدام تعريف الضرب القياسي يمكن كتابتها على الصورة

$$W = \vec{F}.\vec{S} \qquad (1)$$

حيث $W = \vec{F}.\vec{S}$ هو حاصل الضرب القياسي بين $\vec{F}$ ، $\vec{S}$.

نتيجة ١ : إذا كانت $\theta = 0$ أي إذا كانت القوة في اتجاه الازاحة، في هذه الحالة تكون (1) على الصورة

$$W = FS \qquad (2)$$

نتيجة ٢ : إذا كانت $\theta = \pi$ أي إذا كانت القوة في الاتجاه المضاد للازاحة فإن

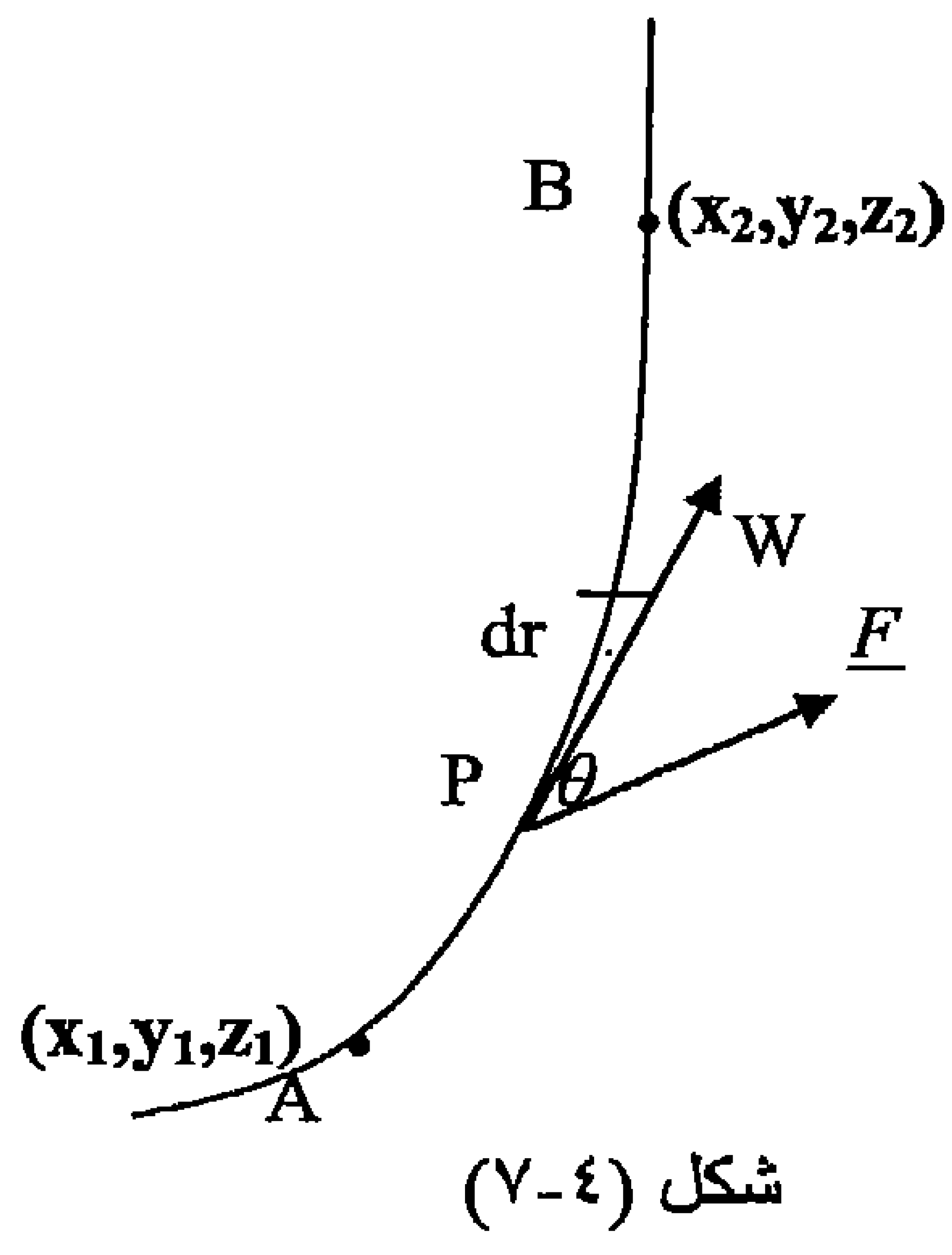
الشغل المبذول من (1) يعطى على الصورة

$$W = -FS \qquad (3)$$

أي أن الشغل المبذول ناتجاً من قوة مقاومة.

٢/٤/٤ – إذا كانت القوة متغيرة أثناء الحركة :

نعتبر نقطة مادية تتحرك في مستوى ولنفرض أنها ترسم المنحنى تحت تأثير قوة متغيرة $\vec{F}$ ،لحساب الشغل المبذول لنقل النقطة من A إلى B نعتبر ازاحة صغيرة $d\,r$ على المنحنى ونحسب عنصر الشغل المبذول dW في هذه الازاحة و هو $dW = \vec{F}.d\vec{r}$ ، حيث F مقدار القوة عند الموضع P ، فإن الشغل المبذول لنقل النقطة المادية من A إلى B كما في الشكل (٤–٧) هو



شكل (٤-٧)

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (1)$$

حيث

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \qquad (2)$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \qquad (3)$$

و بالتعويض من (2) و (3) في (1) فإن يمكن كتابة الشغل المبذول في تحريك النقطة المادية على المنحنى على الصورة

$$W=\int_A^B \left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right) \qquad (4)$$

وحيث مركبة القوة المؤثرة في اتجاه المماس F_t عند P هي

$$F_t = F\cos\theta \qquad (5)$$

و حيث $\vec{F}.d\vec{r}=(F\cos\theta)dr$ و باستخدام (5) فإنه يمكن كتابة (1) على الصورة

$$W=\int_A^B F_t dr \qquad (6)$$

نستنتج من (6) أن عندما تتحرك نقطة مادية على منحنى ما فإن يمكن إهمال جميع القوى العمودية المؤثرة على النقطة المادية عند حساب الشغل المبذول (مثل رد الفعل العمودي)،

ومن تعريف الضرب القياسي فإن الشغل كمية قياسية ووحدات الشغل تتوقف على وحدات القوة فإذا كانت وحدة قياس القوة هي النيوتن، ووحدة قياس الإزاحة هي المتر فإن وحدة قياس الشغل هي الجول (Joule)، أما إذا كانت وحدة قياس القوة هي الداين ووحدة قياس الإزاحة هي سنتيمتر فإن وحدة قياس الشغل هي الارج (Erg).

ويعتبر مقدار الشغل المبذول موجباً إذا كان ناتجاً عن قوة خارجية غير مقاومة لحركة الجسم، أما إذا كان الشغل المبذول ناتجاً من أي مقاومة فإن الشغل يعتبر سالباً.

٤/٥–أمثلة :

مثال (١): اوجد الشغل المبذول في تحريك جسيم بواسطة القوة

$\vec{F}=4\vec{i}+10\vec{j}-3\vec{k}$ على المتجه $\vec{r}=-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

الحل

$$W=\vec{F}.\vec{r}=\left(4\vec{i}+10\vec{j}-3\vec{k}\right).\left(-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}\right)=7\,\text{Joule}$$

مثال (٢): أوجد الشغل المبذول لتحريك جسيم مرة واحدة حول قطع ناقص في المستوى xy معادلتـــه $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ بواســـطة القـــوة

$$\vec{F}=(2x\vec{i}-y+z)\,\vec{i}+(x+y-z^2)\vec{j}$$

الحل :

حيث أن الحركة في المستوى فإن $z=0$ و منها $dz=0$ و يكون الشغل المبذول

$$W=\int_A^B\left(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\right)=\int_A^B\left((2x-y)\,dx+(x+y)\,dy\right)\quad(1)$$

ولحساب هذا التكامل نستخدم التعويض بالمعادلات البارامترية للقطع الناقص حيث

$$x=3\cos\theta,\quad y=4\sin\theta\,,\ 0\le\theta\le 2\pi\qquad(2)$$

و من (2) نستنتج

$$dx=-3\sin\theta\,d\theta,\quad dy=4\cos\theta\,d\theta\qquad(3)$$

و بالتعويض من (2) و (3) في (1) نحصل على

$$W=\int_A^B\left(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\right)=\int_0^{2\pi}\left([2x-y]\,dx+[x+y]\,dy\right)$$

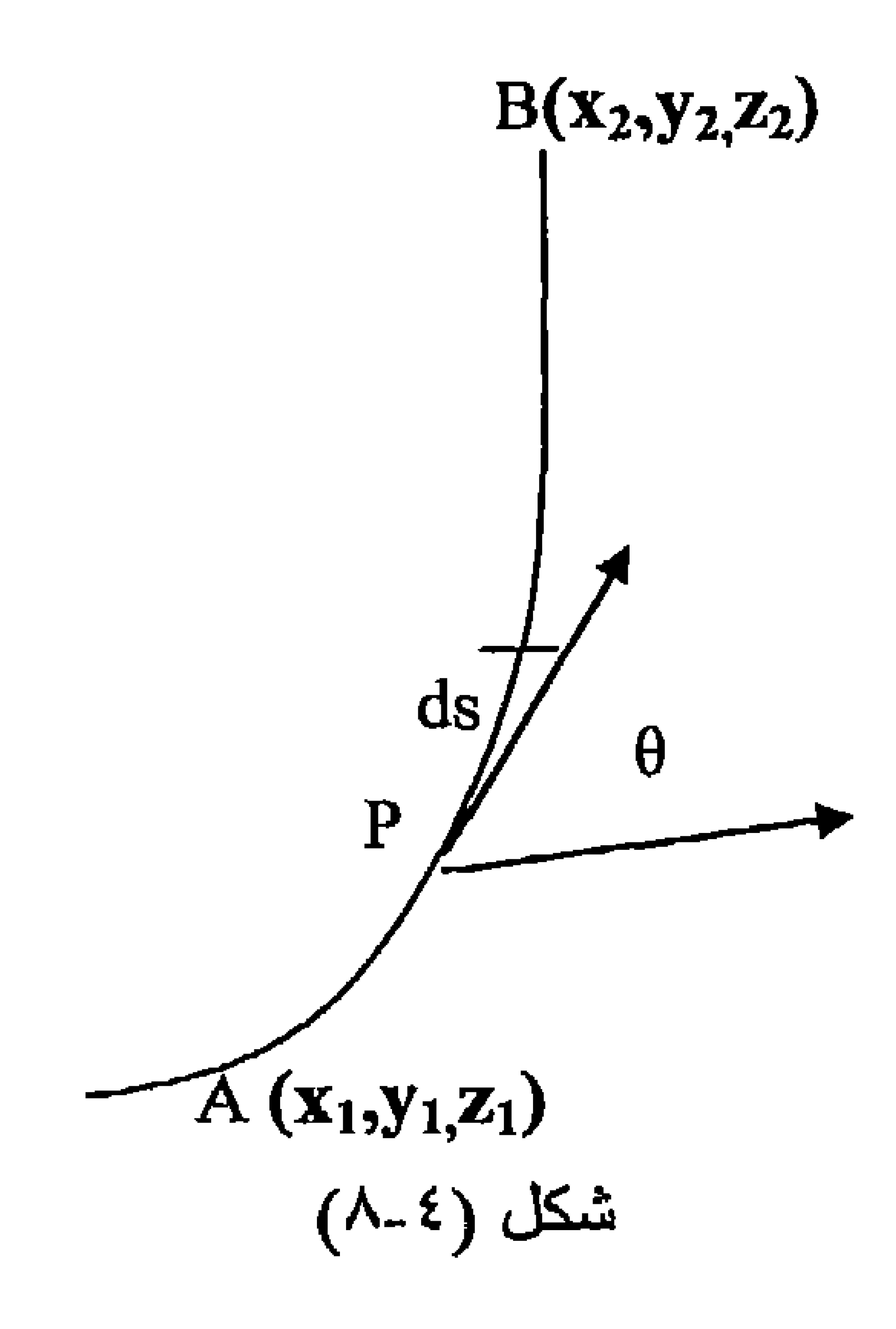
$$=\int_0^{2\pi}\left([6\cos\theta-4\sin\theta](-3\sin\theta\,d\theta)+[3\cos\theta+4\sin\theta i\,4\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(12-2\sin\theta\cos\theta\right)d\theta=\left[12\theta-\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=24\pi\ \text{Joule}$$

٦/٤- قاعدة الشغل والطاقة للحركة المستوية :

Work done and Energy Rule



شكل (٤-٨)

نعتبر نقطة مادية تتحرك حركة مستوية تحت تأثير القوة $\vec{F}$ فترسم المنحنى AB كما في الشكل (٤-٨) فإن الشغل المبذول هو

$$W = \int_A^B F_t ds \qquad (1)$$

و لكن القوة المماسية F_t هي

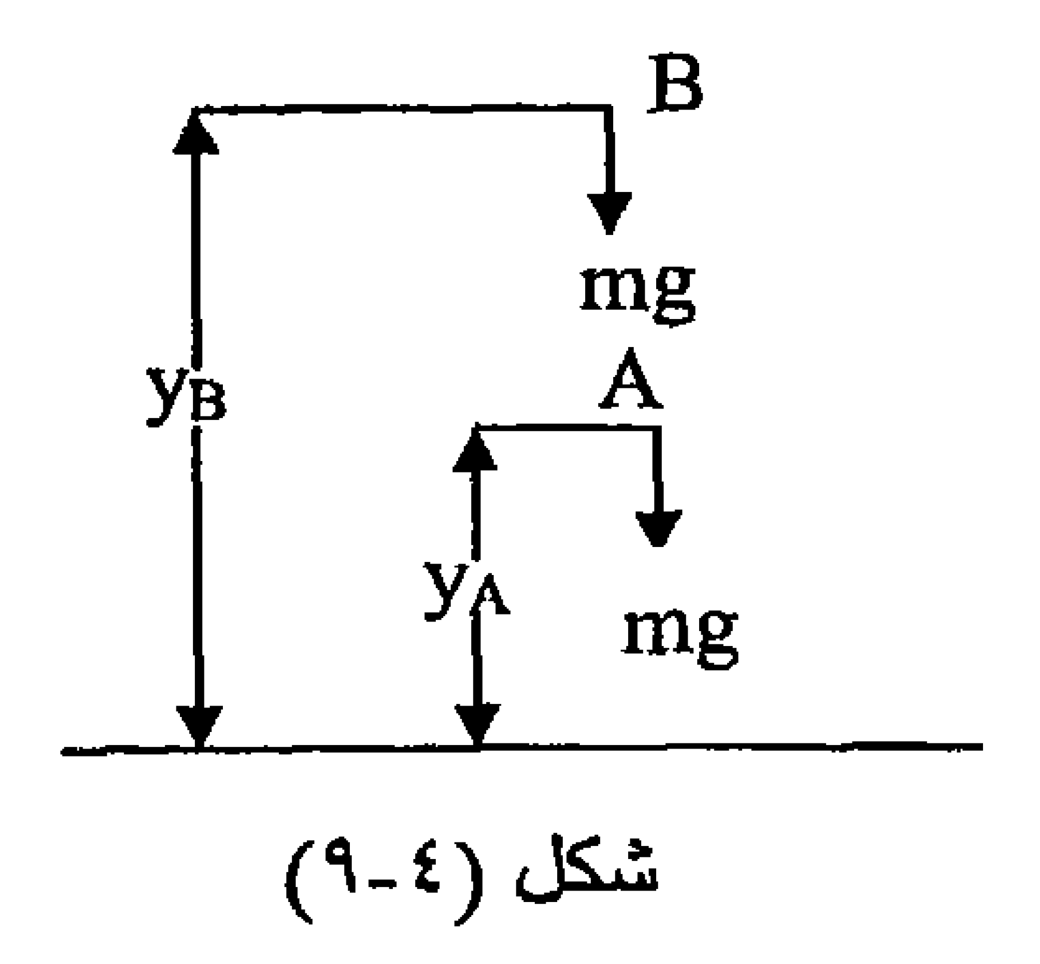
$$F_t = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{F}$ علي الصورة التالية

$$W = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2 \qquad (3)$$

نستنتج من (3) أن الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{F}$ لنقل النقطة المادية من النقطة A إلى النقطة B تساوي التغير في طاقة الحركة ، و بمعني أن الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{F}$ لنقل النقطة المادية من النقطة A إلى النقطة B يساوي الفرق بين طاقة الحركة النهائية عند أي عند B وطاقة الحركة الابتدائية أي عند A.

٤/٧- طاقة الوضع Potential Energy :



شكل (٤-٩)

إذا تحرك جسيم كتلته m ووزنه mg رأسياً إلى أعلى من نقطة على ارتفاع y_A من سطح الأرض إلى نقطة على ارتفاع y_A فيعرف الشغل المبذول على الصورة

$$W = -(mgy_B - mgy_A) = -mgy \qquad (1)$$

والاشارة سالبة لأن القوة عكس اتجاه المجال، إن هذا الشغل يمثل طاقة الوضع لجسيم كتلته m يتحرك في مجال الجاذبية، أي أن الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية عند تحريك جسم مسافة رأسية y يتحول إلى طاقة وضع في الجسم.

٤/٨- مبدأ ثبوت الطاقة Principle of energy steady :

استنتجنا أن الشغل المبذول بواسطة القوة $\vec{F}$ لنقل النقطة المادية من النقطة A إلى النقطة B يساوي الفرق بين طاقة الحركة النهائية عند أي عند Bو طاقة الحركة الابتدائية أي عند A أي أن

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2 \qquad (1)$$

أيضا استنتجنا أن الشغل المبذول

$$W_{A\to B} = mgy_A - mgy_B \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن

$$\frac{1}{2}v_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}v_B^2 + mgy_B \qquad (3)$$

نستتج من (3) أن مجموع طاقتي الحركة و الوضع عند A يساوي مجموع طاقتي الحركة و الوضع عند B ، و يعرف بمبدأ ثبوت الطاقة و يمكن كتابته على الصورة

$$T_A + U_A = T_B + U_B \qquad (4)$$

حيث T_A ، U_A طاقتي الحركة و الوضع عند الموضع A، بينما T_B ، U_B طاقتي الحركة و الوضع عند الموضع B، و علي وجه العموم فإن مجموع طاقتي الحركة و الوضع يساوي مقدار ثابت أي أن $T+U=$ Const. أيضا من (3) يمكن استنتاج قانون السرعة علي الصورة

$$v_A^2 = v_B^2 + 2g(y_B - y_A) \qquad (5)$$

٤/٩- أمثلة :

مثال(١): جسم كتلته $0.2\,kg$ رُفع إلى أعلى بحيث أصبح ارتفاعه عن سطح الأرض $10\,m$، احسب طاقة وضعه عن هذا الارتفاع ثم احسب التغير في طاقة الوضع عندما يهبط إلى أسفل بحيث يصبح ارتفاعه $4\,m$.(أعتبر عجلة الجاذبية $g \cong 10\,m/sec^2$)

الحل :

عندما يكون الجسم على ارتفاع $10\,m$ عن سطح الأرض فتكون طاقة وضعه

$$U_1 = -mgy_1 = -0.2(10)(10) = -20 \text{ Joule} \qquad (1)$$

طاقة وضع الجسم عندما يهبط ويكون على ارتفاع $4\,m$ هي

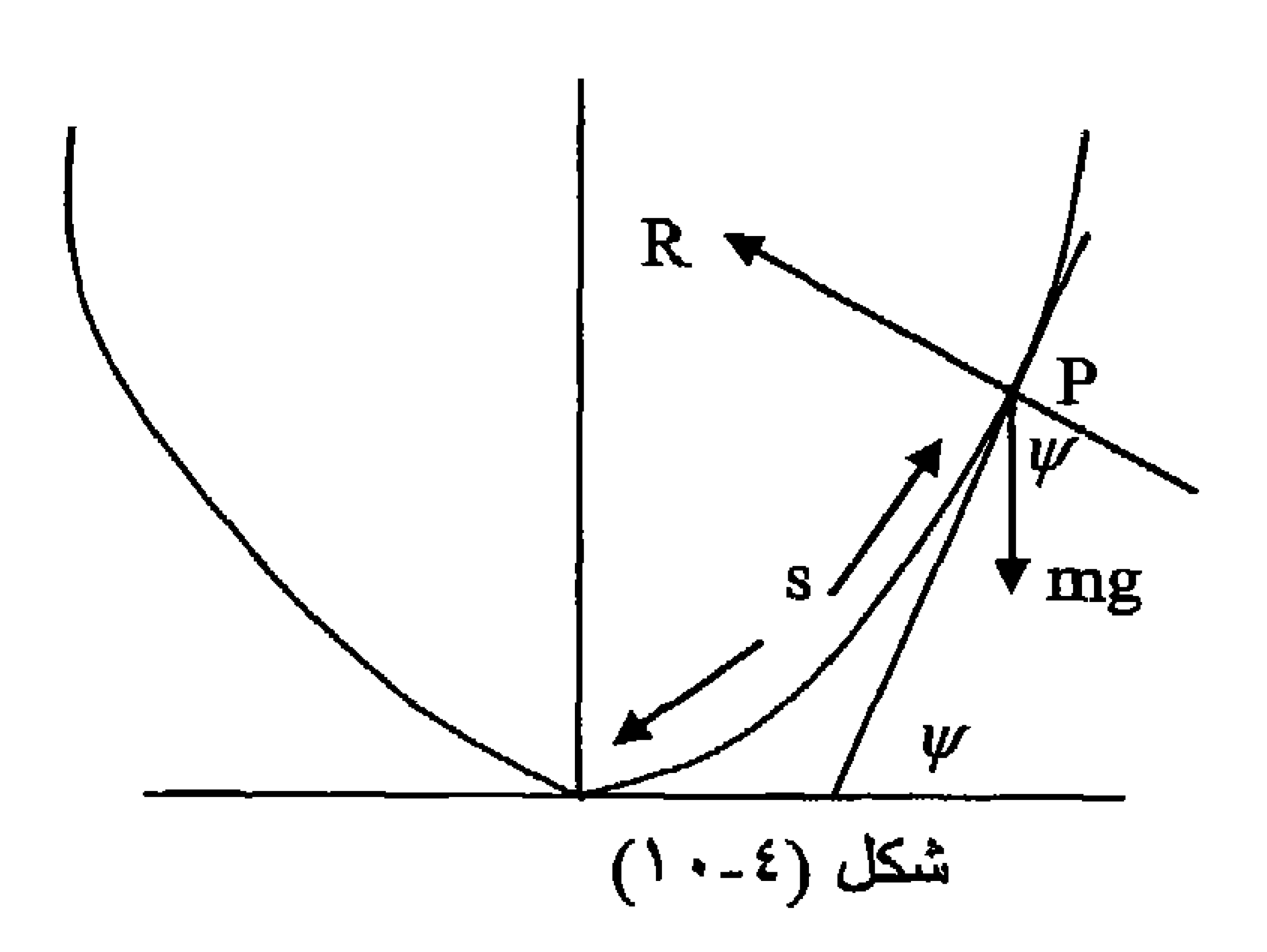
$$U_2 = mgy_2 = 0.2(10)(4) = 8 \text{ Joule} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن التغير في طاقة وضع الجسم هو

$$U_2 - U_1 = -0.2(10)(10) = 8 - (-20) = 28 \text{ Joule}$$

مثال(٢): أنبوبة رفيعة على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 4ay$ موضوعة في مستوى رأسي و رأس القطع إلى أسفل. تركت نقطة مادية كتلتها m من ارتفاع L لتنزلق من سكون. اثبت أن رد الفعل عند أية لحظة يكافئ $\frac{2mg(a+L)}{\rho}$. حيث ρ نصف قطر التقوس، $4a$ طول الوتر البؤري العمودي.

الحل :



شكل (٤-١٠)

نفرض أن P موضع النقطة المادية عند اللحظة t، والمماس عند P يصنع زاوية ψ مع الأفقي، فإن القوى المؤثرة على النقطة المادية هي:

١- mg الوزن رأسياً إلى أسفل،

٢- R رد فعل الأنبوبة في الاتجاه العمودي على المماس عند P للداخل.

معادلة المنحنى

$$x^2 = 4ay \tag{1}$$

معادلتا الحركة:

معادلة الحركة في اتجاه المماس في اتجاه تزايد s

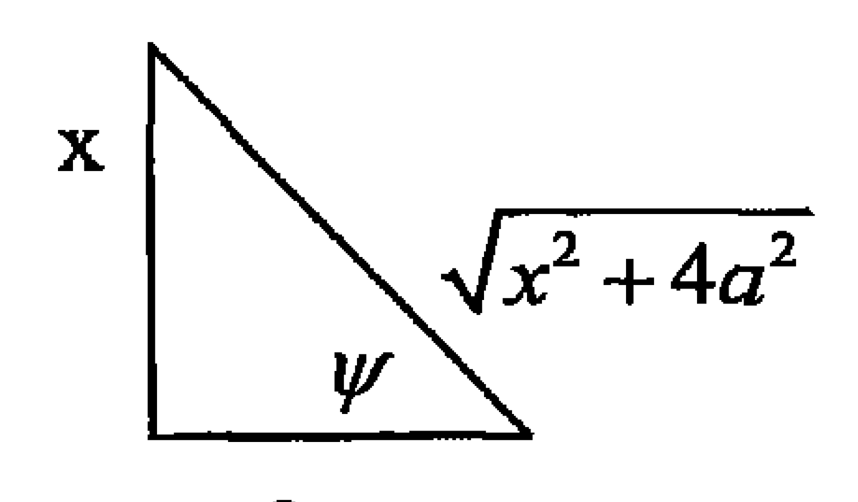
$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \tag{2}$$

معادلة الحركة في اتجاه العمودي على المماس للداخل

$$\frac{m}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R - mg\cos\psi \tag{3}$$

لايجاد رد الفعل من (3) يجب إيجاد $\rho, \dot{s}$

نعلم أن:



$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

بالتعويض من (1) في (2) نجد أن

$$\tan\psi = \frac{x}{2a} \tag{5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a} \tag{6}$$

أيضاً

$$\cos\psi = \frac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \frac{a}{\sqrt{ay+a^2}} \tag{7}$$

من (4)، (6) نجد أن

$$\rho=\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''}=2a\left(1+\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (8)$$

أيضاً لإيجاد $\dot{s}$ إما أن تكامل المعادلة (2) أو نستخدم معادلة الطاقة

$$m(\dot{s})^2+2mgy=mgL \qquad (9)$$

من (9) نحصل على

$$(\dot{s})^2=2g(L-y) \qquad (10)$$

بالتعويض من (7)، (8) ، (10) في (3) نجد أن

$$R=\frac{mga}{\sqrt{ay+a^2}}+\frac{2mg(L-y)}{2a\left(1+\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{mg\left[2a\left(1+\frac{y}{a}\right)+2L-2y\right]}{2a\left(1+\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2mg(a+L)}{\rho}$$

ملحوظة: يمكن إيجاد $\dot{s}$ من المعادلة (2) و ذلك بوضع $\ddot{s}=\dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds}$، $\sin\psi=\frac{dy}{ds}$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

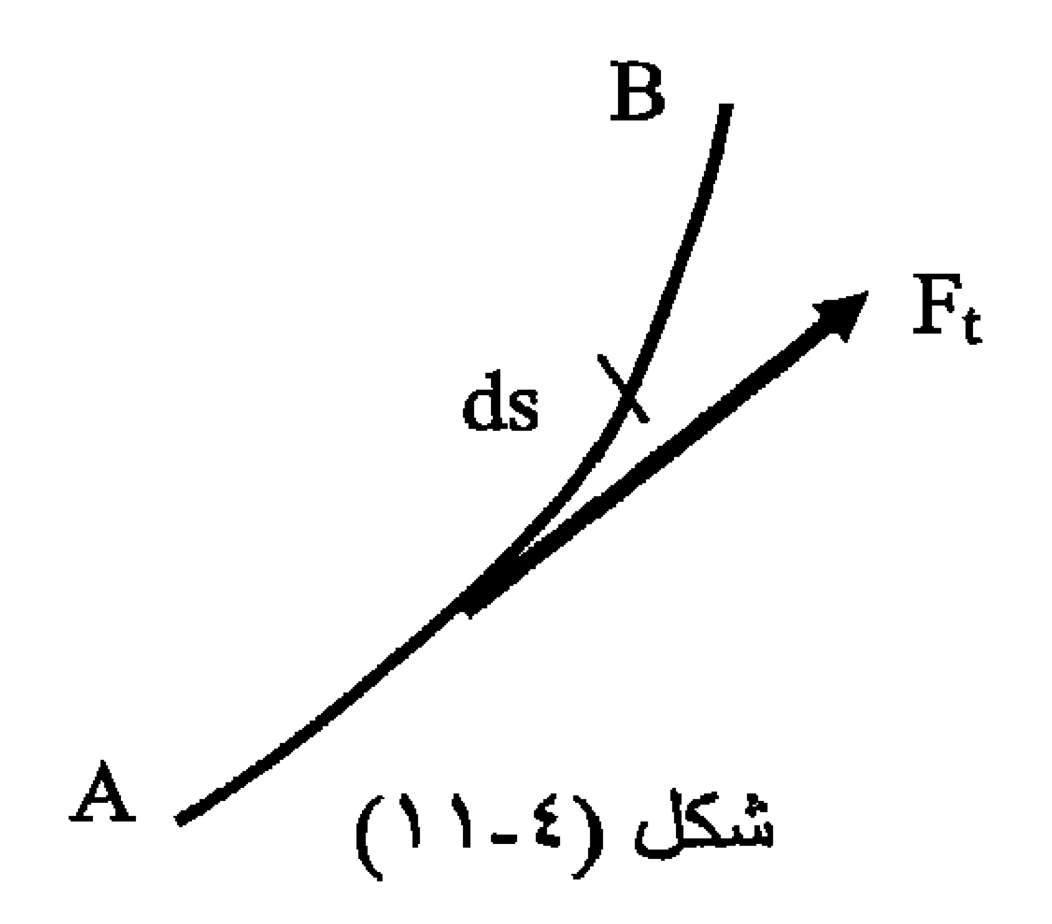
$$\frac{1}{2}(\dot{s})^2=-gy+c$$

حيث c ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية حيث عند $y=L,\dot{s}=0,t=0$ نحصل على $c=gL$ و بالتعويض عن الثابت نجد أن

$$(\dot{s})^2=2g(L-y)$$

و هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من (10).

٤/١٠- المجالات المحافظة Conservative Fields :



شكل (٤-١١)

لقد أثبتنا أن الشغل المبذول لتحريك نقطة مادية من الموضع A إلى الموضع B.

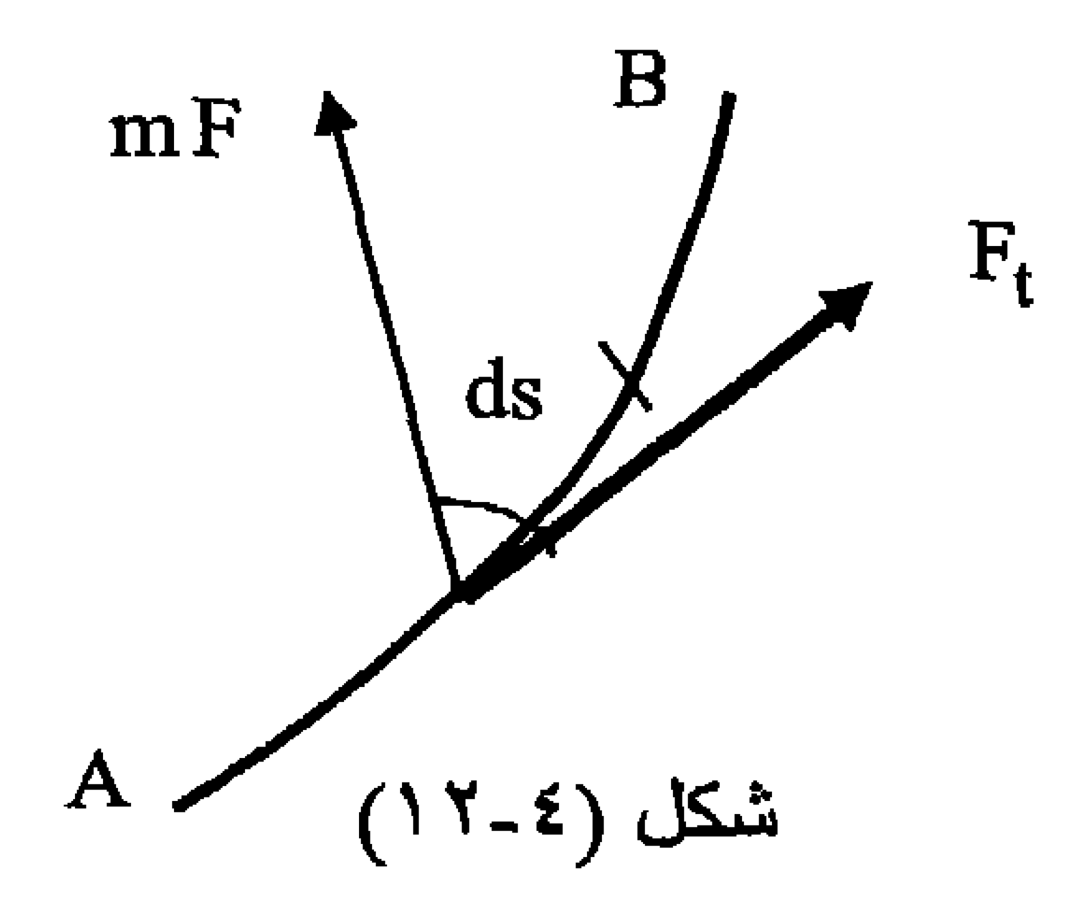
$$W=\int_{A}^{B} F_t ds$$

وفي الغالب تتوقف قيمة هذا التكامل أي قيمة الشغل المبذول على المسار الذي تخذه النقطة في حركتها من A إلي B

أما إذا كانت قيمة الشغل المبذول في الحركة من A إلى B الذي لا تتوقف على المسار الذي تتخذه في هذه الحالة تسمي القوى المؤثرة بالقوى المحافظة. كما يسمى المجال الناشيء عن هذه القوى بالمجال المحافظ.

فمثلاً المجال الجاذب، المجال المغناطيسي والمجال الكهربي كلها مجالات محافظة وعلى ذلك يمكن اثبات أن الحركة تحت تأثير قوة مركزية جاذبة هي حركة في مجال محافظ.

فمثلاً: إذا كان AB مسار مركزي و القوة المركزية هي F لوحدة الكتل فإن الشغل المبذول لتحريك نقطة مادية كتلتها m من A إلى B من الشكل (٤-١٢) تعطى من العلاقة



شكل (٤-١٢)

$$W=\int_{A}^{B} F_t ds=-\int_{A}^{B} mF\cos\varphi\, ds \qquad (1)$$

وحيث الزاوية φ التي تصنعها القوة F مع المماس ، مركبة F_t القوة المماسية ولكن

$$\cos\varphi=\frac{dr}{ds} \quad , \quad F=f(r) \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

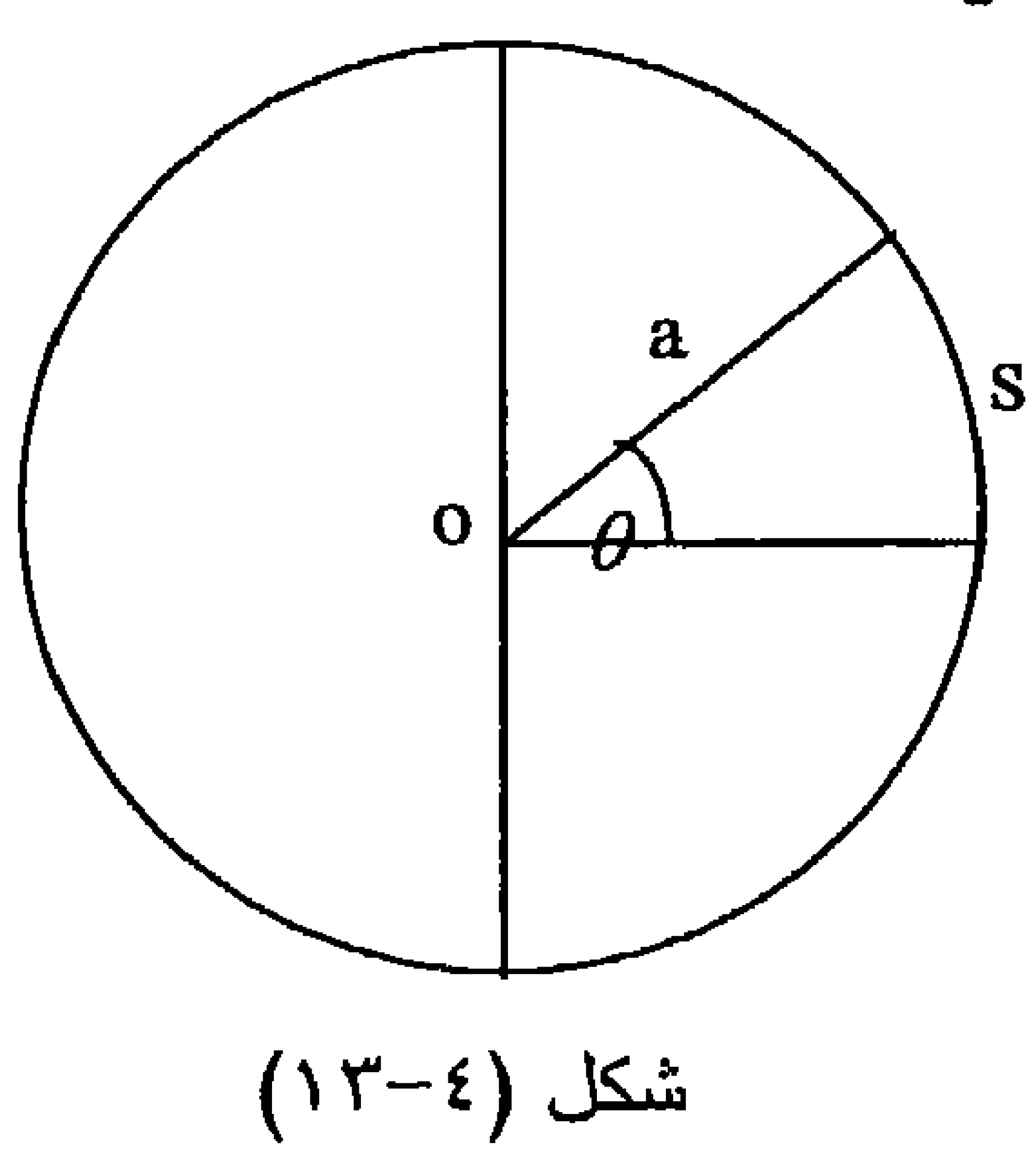
$$W = -\int_{r_1}^{r_2} m f(r)\, dr \qquad (3)$$

فمثلاً في الحركة تحت تأثير قانون التربيع العكسي $F = \frac{\mu}{r^2}$ حيث μ ثابت فإن

$$W = -m\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu}{r^2}\, dr = \mu m\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

وهذا الشغل لا يتوقف على المسار من A إلى B.

٤/١١- الحركة العامة في دائرة رأسية :



شكل (٤-١٣)

عندما تتحرك نقطة مادية في دائرة نصف قطرها a ويفرض أن P موضع النقطة المادية عند اللحظة t وعلى ذلك فإن من الشكل (٤-١٣) فإن

$$s = a\theta$$

و منها

$$\dot{s} = a\dot{\theta}$$

أي أن السرعة لنقطة مادية تتحرك في دائرة نصف قطرها a هي

$$\dot{s} = a\dot{\theta} \qquad (1)$$

وفي اتجاه تزايد θ .

٤/١١/١-مركبتا العجلة : components of acceleration

نعلم أن مركبتا العجلة لنقطة مادية في الإحداثيات الذاتية هما $a_t = \ddot{s}$ في اتجاه المماس و $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ في اتجاه العمودي علي المماس و في حالة الحركة في دائرة يكون $\rho = a$ و $a_t = a\ddot{\theta}$ بينما $a_n = a\dot{\theta}^2$،

وتكون معادلة الحركة لنقطة مادية تتحرك في دائرة راسية في اتجاه المماس تزايد θ هي

$$ma\ddot{\theta} = \sum F_t$$

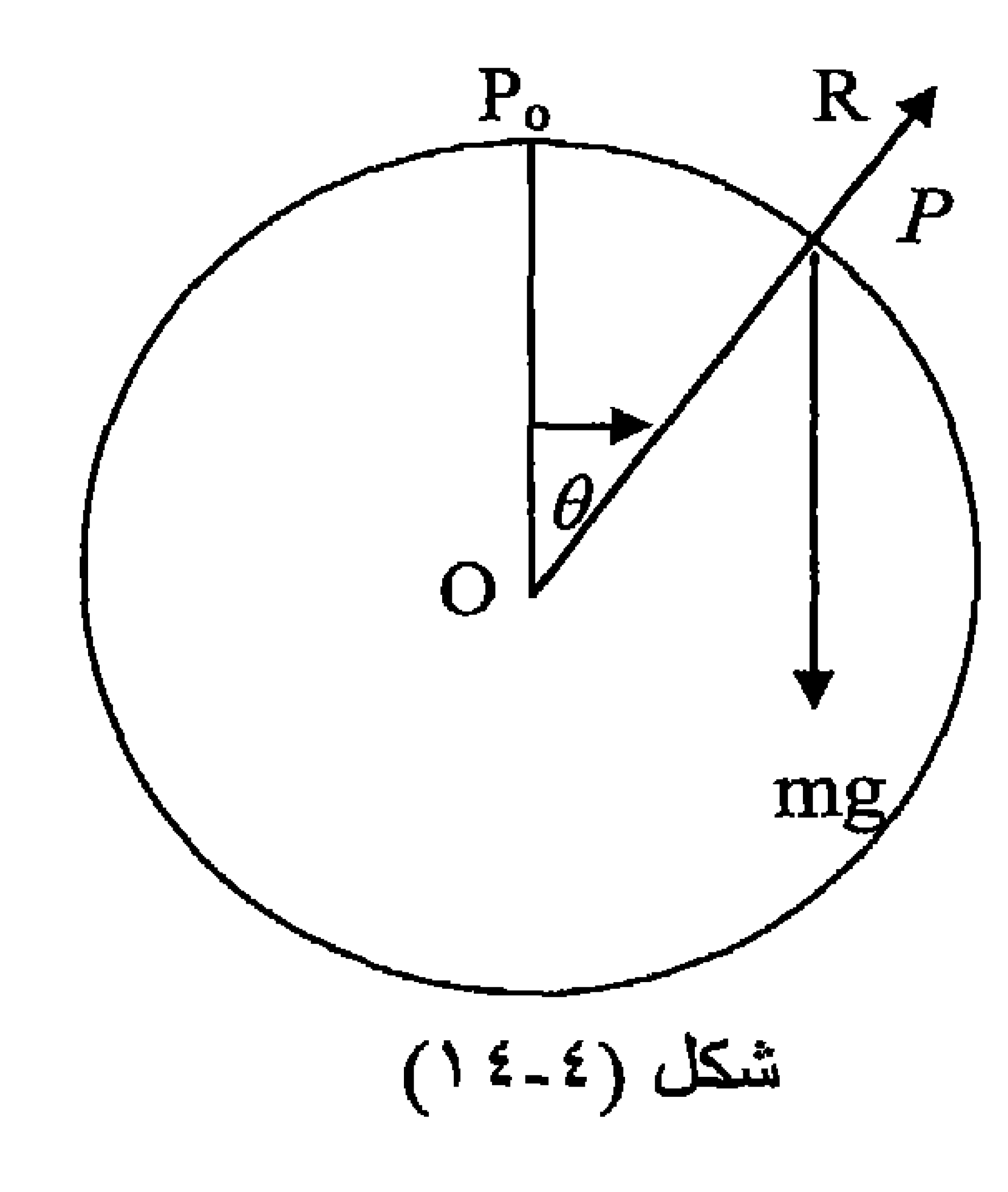
حيث $\sum F_t$ هو محصلة القوى في اتجاه المماس ، بينما معادلة الحركة لنقطة مادية تتحرك في دائرة رأسية في اتجاه العمودي على المماس للداخل هي

$$ma\dot{\theta}^2 = \sum F_n$$

حيث $\sum F_n$ هي محصلة القوى في اتجاه نصف القطر للداخل .

٤/١١/٢- دراسة حركة جسيم يتحرك من الخارج على سلك دائري أملس مستواه رأسي :

نفرض أن سلك دائري أملس رأسي مركزه o نصف قطره a مثبت بحيث كان P_0 أعلى نقطة فيها أي أن P_0o يكون رأسياً. ونفرض أن جسيم ينزلق عليها كتلته m والمطلوب دراسة الحركة.



شكل (٤-١٤)

نفرض أن الجسيم في اللحظة t صار في الموضع P حيث $P_0oP = \theta$.

القوى المؤثرة :

١- mg وزن الجسيم رأسياً إلى أسفل،

٢- R رد الفعل العمودي عند P على الجسيم،

معادلتا حركة الجسيم في اتجاه المماس والعمودي عليه

$$m a\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{a} = mg\cos\theta - R \qquad (2)$$

و بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (1) و فصل المتغيرات و التكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta + c_1 \qquad (3)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، حيث عند $t = 0$ كانت $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ و من (3) نحصل على $c_1 = g$ ، و بالتعويض عن قيمة الثابت c_1 في (3) نستنتج أن

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1+\cos\theta) \qquad (4)$$

و المعادلة (4) تعطينا $\dot{\theta}$ عند أي لحظة ، و لكن $v = a\dot{\theta}$ فإن من (4) نجد أن

$$v^2 = 2ga(1-\cos\theta) \qquad (5)$$

المعادلة (5) تعطينا السرعة الخطية عند أي موضع، من (2) ,(5) نجد أن

$$R = mg(3\cos\theta - 2) \qquad (6)$$

المعادلة (5) تعطي رد الفعل العمودي عند أي موضع ويبقى الجسيم على الدائرة ما بقيت R فإذا انعدمت ترك الجسيم الدائرة عندئذ $R = 0$ ومن (6) نجد أن

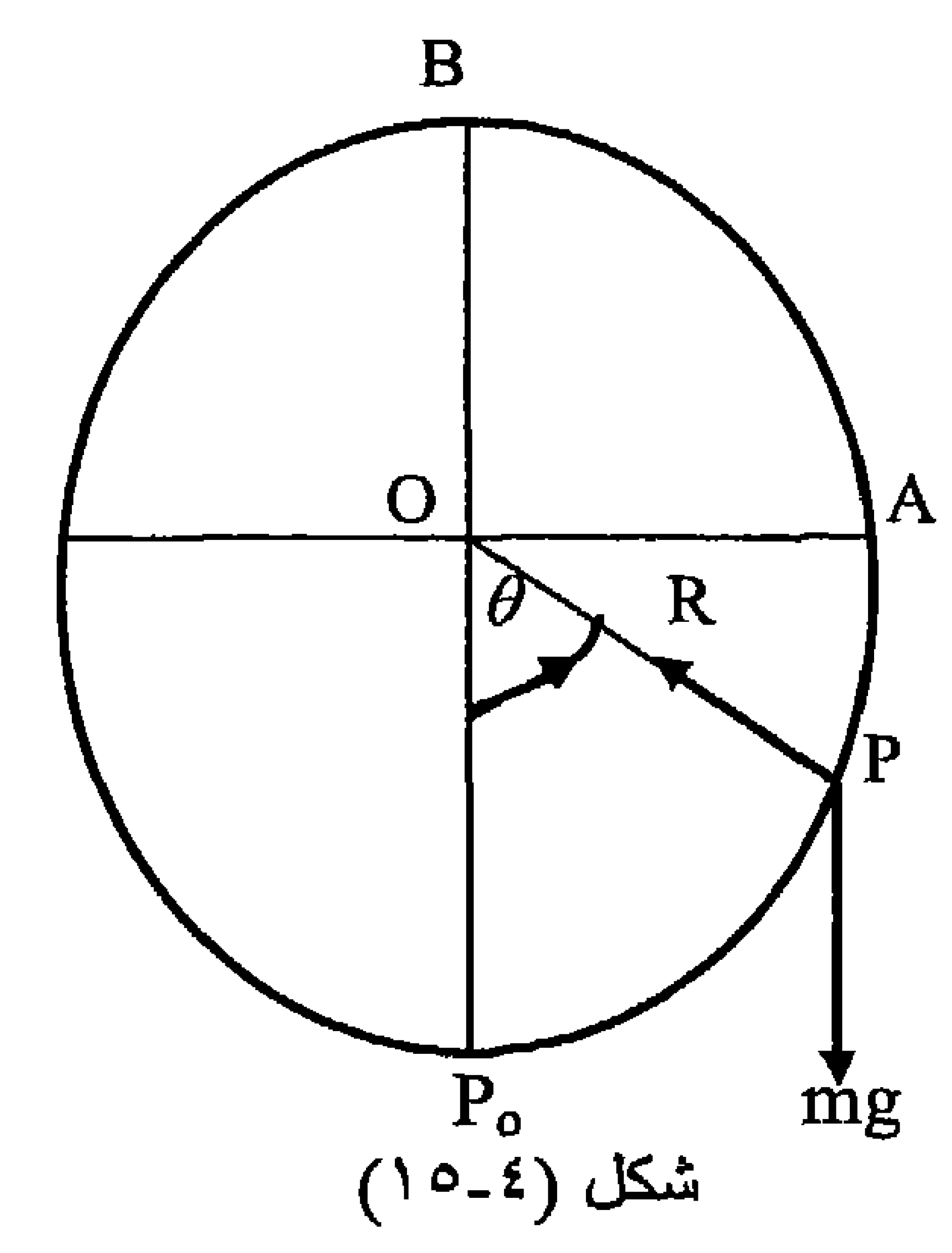
$$\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \qquad (7)$$

وعندئذ يكون سرعة الجسيم هي من (7)

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}ga} \qquad (8)$$

ويكون الجسيم قد هبط مسافة رأسية $\frac{1}{3}a$ ويتحرك الجسيم كمقذوف عادي بسرعة ابتدائية تساوي $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}ga}$ في اتجاه يصنع زاوية مع الأفقي $\alpha = \cos^{-1}\frac{2}{3}$ ويمكن دراسة الحركة التالية كمقذوف.

٤/١١/٣- دراسة حركة جسيم داخل أنبوبة دقيقة دائرية ملساء في مستوى رأسي :



شكل (٤-١٥)

نفرض أن جسيم كتلته m قُذف بسرعة ابتدائية أفقية v_1 داخل دائرة رأسية ملساء من الداخل من أسفل موضع لها والمطلوب دراسة الحركة، ولدراسة الحركة نفرض أن نصف قطر الدائرة a مركزها o ونفرض أنه في اللحظة t صار الجسيم في الموضع P حيث $P_oo P = \theta$ باعتبار $P_o o$ نصف القطر الرأسي إلى أسفل وأن سرعتها v .

القوى المؤثرة :

١- mg وزن الجسيم رأسياً إلى أسفل

٢- R رد الفعل العمودي ماراً بمركز الدائرة o كما بالشكل (٤-١٥)

و تكون معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر هي

$$m\frac{v^2}{a} = R - mg\cos\theta \qquad (1)$$

و معادلة الحركة في اتجاه المماس (اي دتز θ) هي

$$m a\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

من المعادلة (2) بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta + c_1 \tag{3}$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، حيث عند $t=0$ كانت $\theta=0$ و $\dot{\theta}=\frac{v_1}{a}$ و من (3) نحصل على $c_1=\frac{(v_1)^2}{a}-2g$ ، و بالتعويض عن قيمة الثابت c_1 في (3) نستنتج أن

$$v^2 = v_1^2 - 2ga\,(1-\cos\theta) \tag{4}$$

المعادلة (4) تعطينا السرعة عند أي موضع، و بالتعويض من (4) في (1) نحصل على رد الفعل عند أي لحظة t على الصورة

$$R = \frac{m}{a}\left[v_1^2 + ga\,(3\cos\theta - 2)\right] \tag{5}$$

ولإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم نضع $v=0$ في المعادلة (4) فنجد أن

$$\cos\theta = 1 - \frac{v_1^2}{2ga} \tag{6}$$

وعلى ذلك نستنتج من (6) أن

أ. إذا كان $(v_1)^2 < 2ga$ فإن $\cos\theta$ تكون موجبة وعلى ذلك فالجسيم لا يصل إلى الموضع A ومن (5) نجد أن $R>0$ عندئذ وعلى ذلك فإن الجسيم يتذبذب حول Po.

ب. إذا كان $(v_1)^2 = 2ga$ فإن $\cos\theta = 0$ وعلى ذلك فالجسيم يصل إلى الموضع A ومن (5) نجد أن $R=0$ عندئذ وعلى ذلك فإن الجسيم يتذبذب حول Po.

ج. إذا كان $(v_1)^2 > 2ga$ فإن $\cos\theta$ تكون سالبة وعلى ذلك يتجاوز الجسيم الموضع الأفقي A ومن (4) نجد أن $R<0$ عندئذ وعلى ذلك فإن رد الفعل ينعدم قبل أن تنعدم السرعة ويتحرك الجسيم كمقذوف عادي، وشرط أن يصل الجسيم إلى أعلى نقطة (شرط اللفات الكاملة) في الدائرة هو $R\geq 0$ عند $\theta=\pi$ أي أن R تكون موجبة أو على الأقل تساوي صفر عند B (أعلى نقطة) ومن (5) نستنتج أن:

$$v_1 = \sqrt{5ga} \tag{7}$$

و بالتعويض من (7) في (4) نجد أن

$$v = \sqrt{ga} \qquad (8)$$

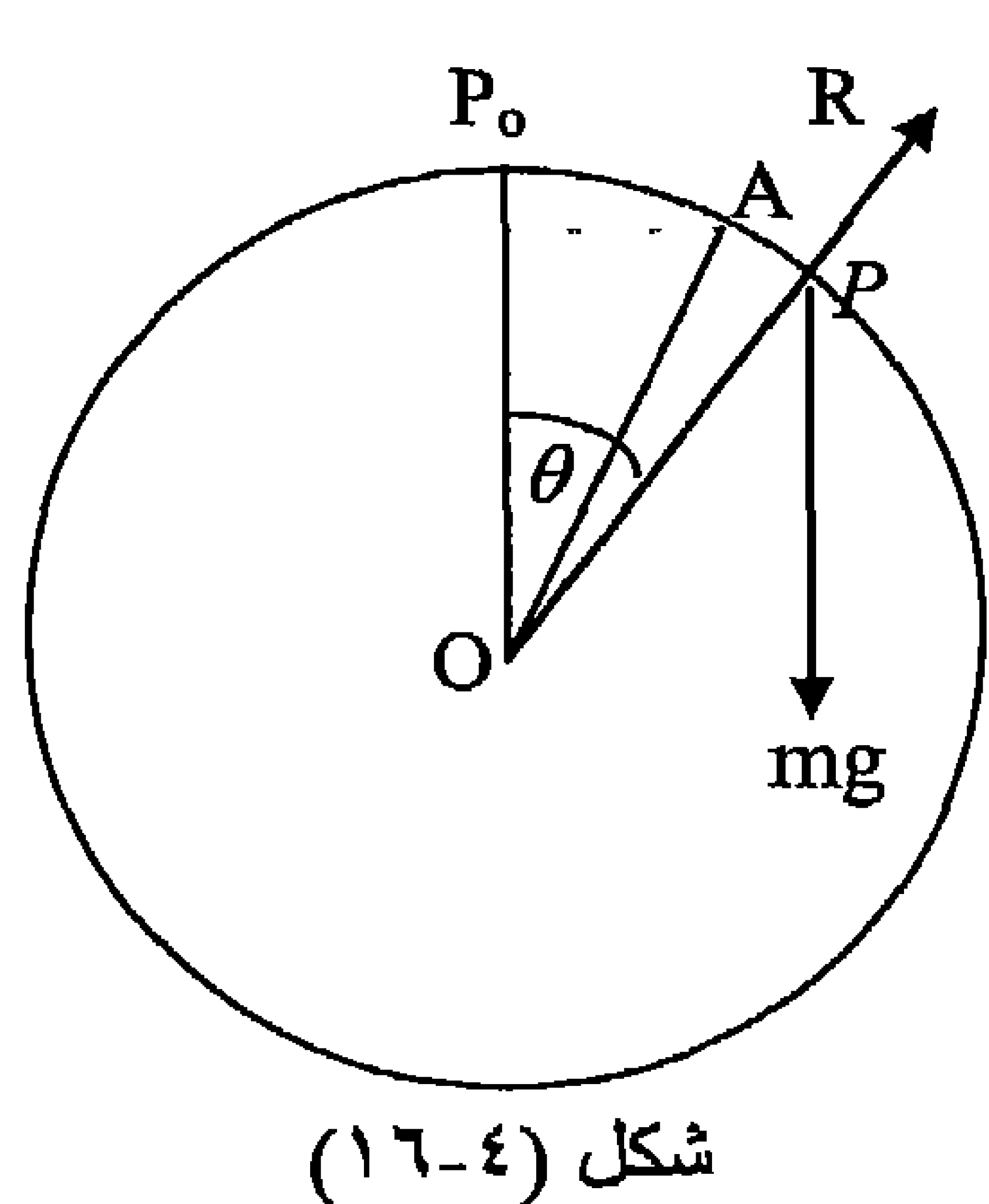
ويتم الجسيم دورته على الدائرة، وإذا كانت $v_1 > \sqrt{5ga}$ فإن $R > 0$، $v = \sqrt{ga}$ ،
إذاً $v = \sqrt{5ga}$ هي النهاية الصغرى للسرعة الإبتدائية للحركة لكي يتمكن الجسيم من اتمام دورته على الدائرة أي يعمل دورات كاملة على الدائرة.

١٢/٤- أمثلة :

مثال (١): تنزلق نقطة مادية من سكون من نقطة على عمق $\frac{a}{2}$ من أعلى نقطة من دائرة رأسية ملساء مثبتة نصف قطرها a. اثبت أن النقطة المادية تترك الدائرة عندما تكون على ارتفاع $\frac{a}{3}$ من مستوى المركز. وأوجد سرعتها عندئذ.

الحل :

نفرض P_0 أن أعلى نقطة في الدائرة وأن النقطة المادية بدأت حركتها من A حيث A على عمق $\frac{a}{2}$ أسفل P_0 ونفرض أنها صارت في الموضع P، حيث $P_0 o P = \theta$ شكل (٤-١٦)،



شكل (٤-١٦)

القوى المؤثرة:

١- mg وزن النقطة المادية رأسياً إلى أسفل.

٢- Rرد الفعل العمودي للخارج.

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد θ هي

$$ma\ddot{\theta}=mg\sin\theta \qquad (1)$$

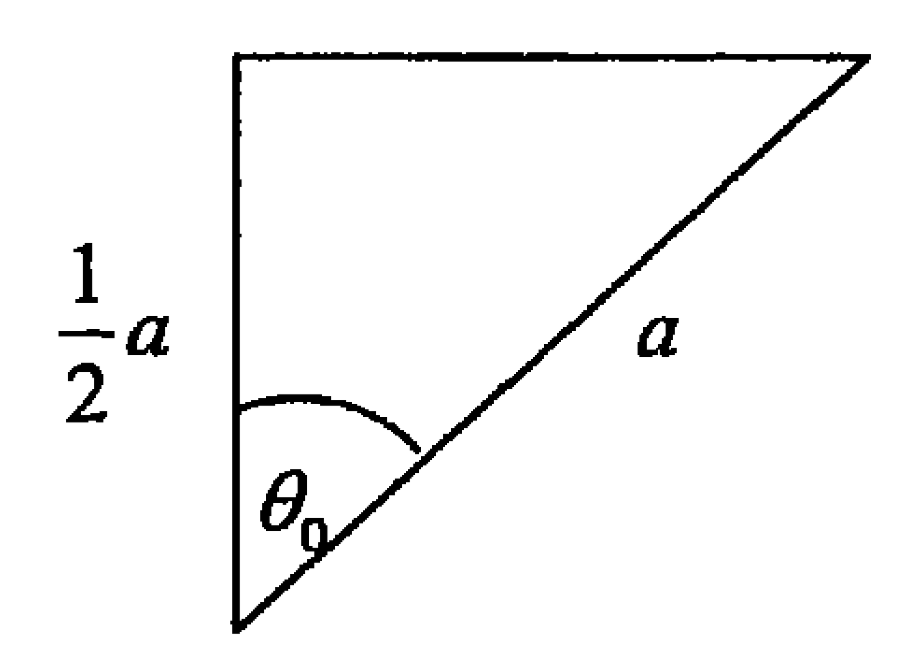
و معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر للداخل هي

$$m\frac{v^2}{a}=mg\cos\theta-R \qquad (2)$$

و بوضع $\ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (1) و فصل المتغيرات و التكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2=-g\cos\theta+c_1 \qquad (3)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، حيث عند $t=0$ كانت $\cos\theta=\frac{1}{2}$ و $\dot{\theta}=0$ و من (3) نحصل على $c_1=\frac{g}{2a}$ ، و بالتعويض عن قيمة الثابت c_1 في (3)



نستنتج

$$\dot{\theta}^2=\frac{g}{a}(1-2\cos\theta) \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (2) نحصل على

$$R=mg(3\cos\theta-1) \qquad (5)$$

و تترك النقطة المادية الدائرة عندما $R=0$ ومن (5) نجد أن $\cos\theta=\frac{1}{3}$

أي أن الجسم يترك الدائرة عندما تكون $\theta=\cos^{-1}\frac{1}{3}$ أي عندما يكون ارتفاعها عن المركز $a\cos\theta=\frac{1}{3}a$ ، وهو المطلوب أولاً ،

وعندئذ فإن سرعتها الخطية تتعين من المعادلة (4) حيث

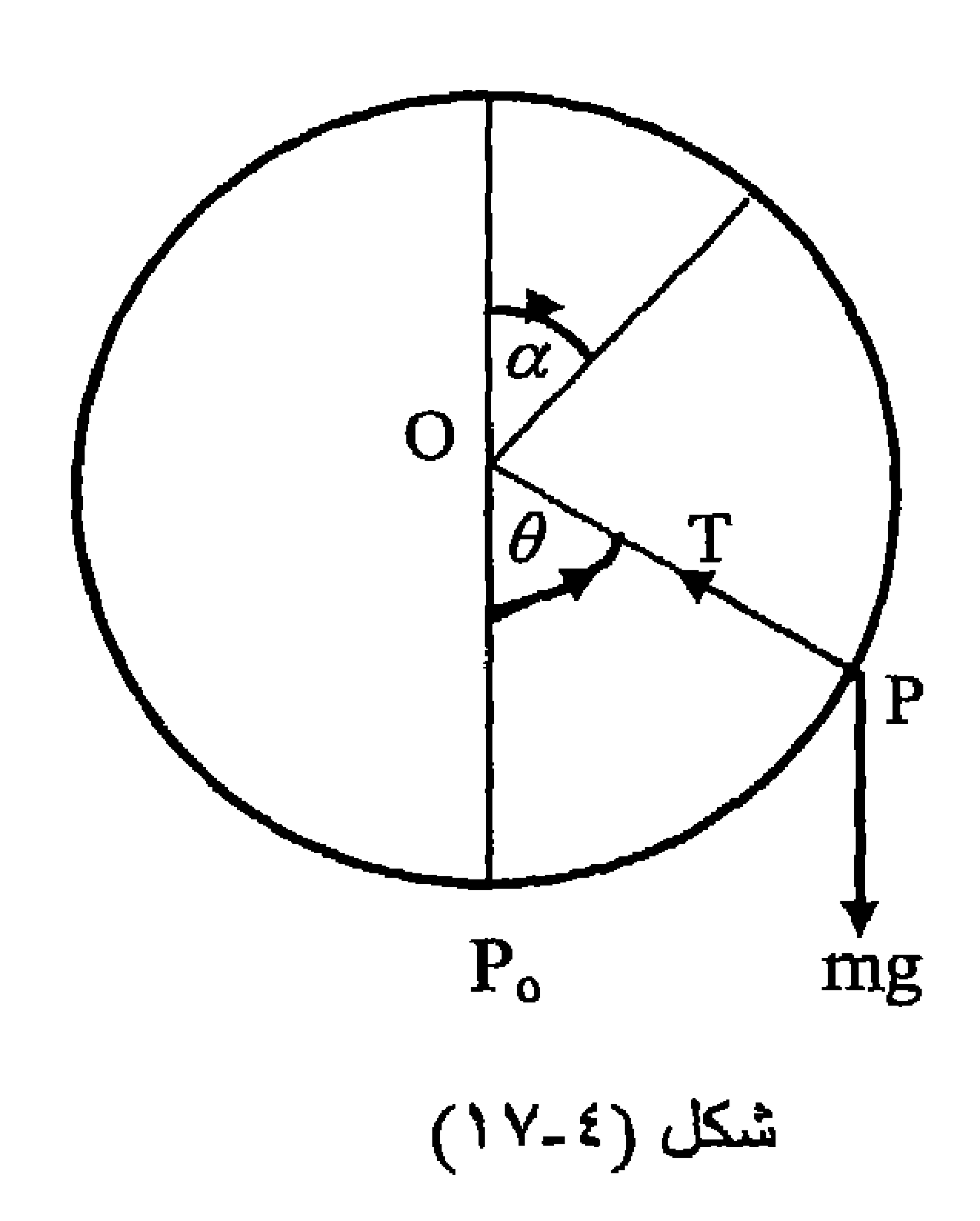
$$v^2 = ga(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3} ga$$

و منها نجد أن الجسيم يترك الدائرة بالسرعة $v = \sqrt{\frac{1}{3} ga}$.

وهو المطلوب ثانياً.

مثال(٢): قذفت نقطة مادية كتلتها m باوند معلقة بواسطة خيط خفيف من نقطة ثابتة أفقياً بسرعة قدرها $2\sqrt{ga}$ ft/sec حيث a طول الخيط. اوجد ارتفاع النقطة المادية عن نقطة التعليق عندما يرتخي الخيط. واوجد كذلك الشد في الخيط عندما تكون النقطة المادية على عمق قدره $\frac{a}{2}$ أسفل نقطة التعليق.

الحل :



شكل (٤-١٧)

نفرض أن P_o موضع القذف، P موضع النقطة عند اللحظة t، $P_oOP = \theta$ كما في الشكل (٤-١٦)

القوى المؤثرة :

١- mg وزن النقطة المادية رأسياً إلى أسفل.

٢- T الشد في الخيط ، كما في الشكل (٤-١٦).

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد θ هي

$$ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad (1)$$

و تكون معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر هي

$$m\frac{v^2}{a} = T - mg\cos\theta \qquad (2)$$

و بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (1) و فصل المتغيرات و التكامل نحصل على

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{2g}{a}\cos\theta + c_1 \qquad (3)$$

حيث c_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، حيث عند $\theta = 0, t = 0$ كانت $v = 2\sqrt{ga}$ و من (3) نجد أن $c_1 = \frac{2g}{a}$ و بالتعويض عن الثابت في (3) نحصل على

$$v^2 = 2ga(1 + \cos\theta) \qquad (4)$$

و بالتعويض من (4) في (2) نحصل على الشد حيث

$$T = 2mg + 3mg\cos\theta \qquad (5)$$

وعندما يرتخي الخيط يكون $T = 0$ عندئذ من المعادلة (5) نجد أن

$$\cos\theta = -\frac{2}{3} \qquad (6)$$

أي أن θ عندئذ تكون منفرجة أي أن الخيط يرتخي في النصف العلوي من الدائرة عندئذ يكون الجسيم على ارتفاع $a\cos\alpha$ فوق المركز حيث

$$oA = a\cos\alpha = \frac{2}{3}a \qquad (7)$$

حيث

$$\alpha = \pi - \theta \qquad (8)$$

وعندما تكون النقطة المادية على عمق $\frac{a}{2}$ أسفل O فإن

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad (9)$$

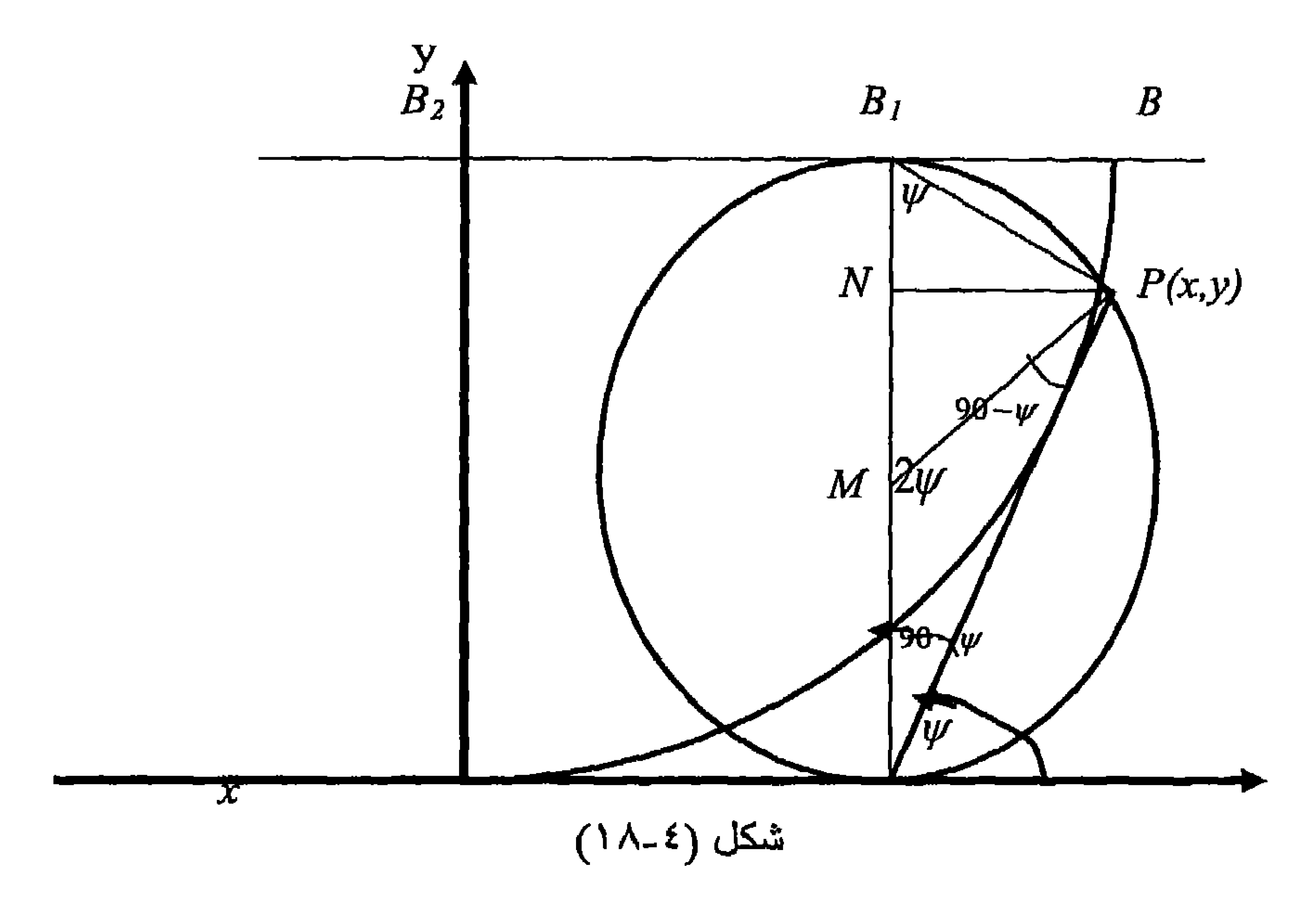
بالتعويض عن قيمة θ في المعادلات (4)، (5) نجد أن

$$v=\sqrt{3ga} \qquad (10)$$

$$T=\frac{7}{2}mg \qquad (11)$$

و المعادلة (11) تعطينا الشد في الخيط عندما تكون النقطة المادية على عمق قدره $\frac{a}{2}$ أسفل نقطة التعليق.

٤/١٣- الحركة على منحنى السيكلويد (الدويري) Cycloid Curve :



شكل (٤-١٨)

تعريف السيكلويد (الدويري): هو المحل الهندسي لحركة نقطة ثابتة على محيط قرص دائري عندما يتدحرج على مستقيم ثابت في مستواه الرأسي.

٤/١٣/١- المعادلات البارامترية لمنحنى السيكلويد :

نفرض أن BB_1B_2 هو المستقيم الذي يتدحرج عليه القرص وأن M موضع مركز القرص عند اللحظة t، وأن P هي النقطة التي ترسم السيكلويد وأن P كانت منطبقة على B عند بدء الحركة وأن o موضع P بعد أن يدور القرص نصف دورة.

باختيار o نقطة الأصل، oC محور السينات، oB_2 محور الصادات، نفرض أن $P\equiv(x,y)$، وحيث أن B_1 هو محور الدوران اللحظي للقرص و PC عمودي على B_1P ، فإن $\widehat{PC}$ هو اتجاه حركة النقطة P عند هذه اللحظة، PC مماس السيكلويد عند P ، ψ هي الزاوية التي يصنعها PC مع ox انظر الشكل (٤–١٨) ، و من الشكل نجد أن

$$x=o\overline{C}+N\overline{P}=\widehat{P}C+a\sin(\pi-2\psi)=a(2\psi)+a\sin 2\psi$$

و منها نستنتج أن

$$x=a(2\psi+\sin 2\psi) \qquad (1)$$

أيضا

$$y=C\overline{N}=C\overline{M}+M\overline{N}=a+a\cos(\pi-2\psi)$$

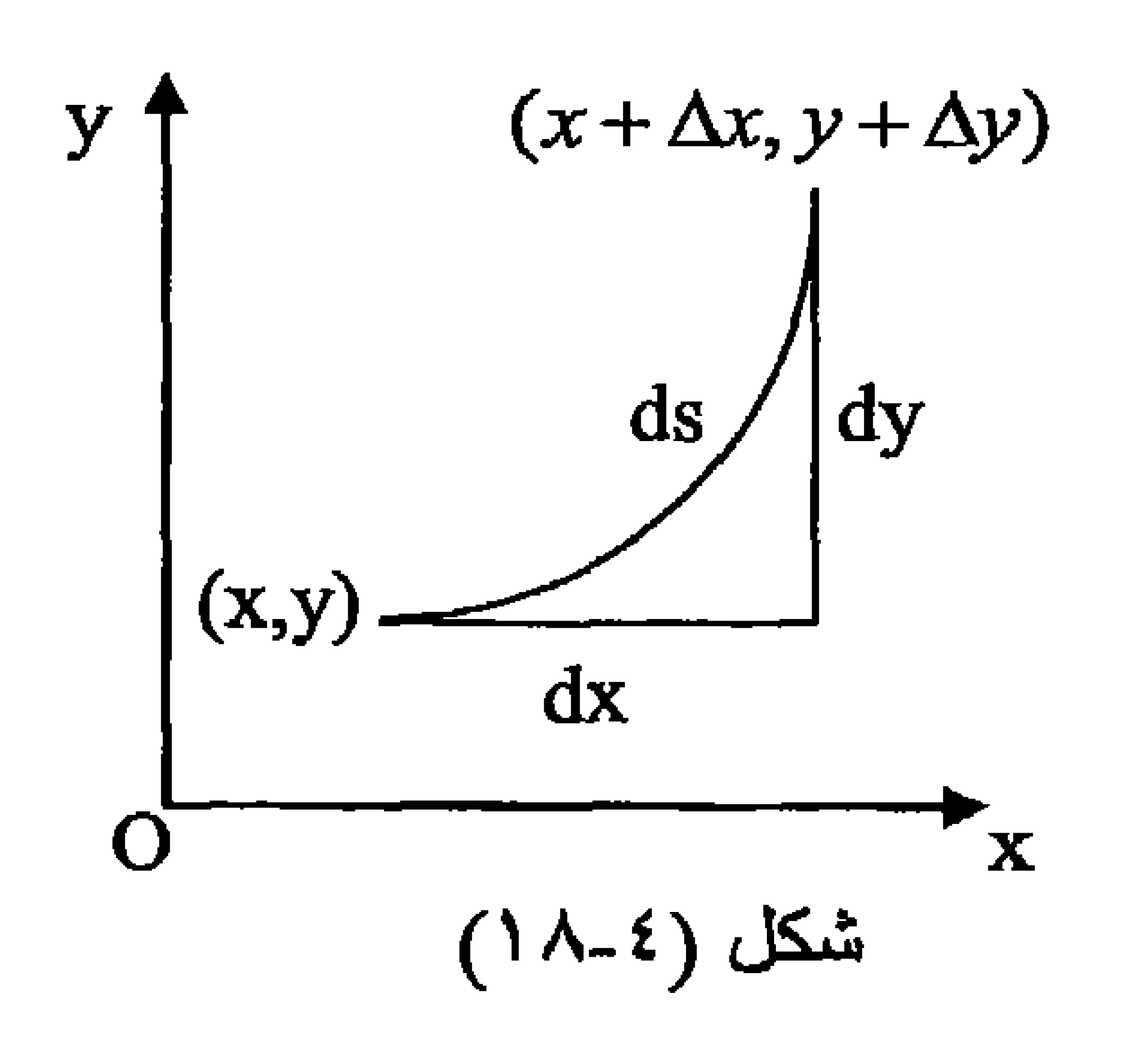
و منها نستنتج

$$y=a-a\cos(2\psi) \qquad (2)$$

المعادلتان (1)، (2) يمثلان المعادلتان البارامتريتان للسيكلويد، و تسمى النقطة o رأس السيكلود ويسمى oy محور السيكلويد بينما تسمى النقطة B ناب السيكلويد ويسمى المستقيم BB_2 بخط الأنياب وهو نصف محيط القرص حيث $BB_2=\pi a$، $CB_1=2a$.

٤/١٣/٢– المعادلة الذاتية للسيكلويد Intrinsic equation :

في هذا البند نستنتج المعادلة الذاتية لمنحني السيكلويد و لذلك نفرض طول عنصر من المنحني ds كما في الشكل (٤–١٨) فإن



شكل (٤-١٨)

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \qquad (1)$$

و المعادلات البارامترية لمنحنى السيكلويد هي

$$x=a(2\psi+\sin 2\psi) \qquad (2)$$

$$y=a-a\cos(2\psi) \qquad (3)$$

بالتعويض من (2) و (3) نجد أن

$$(ds)^2=4a^2\left[1+2\cos 2\psi+\cos^2 2\psi+\sin^2 2\psi\right](d\psi)^2$$

$$=8a^2[1+\cos 2\psi](d\psi)^2$$

$$=16a^2\cos^2\psi\, d\psi$$

و من العلاقة الأخيرة نستنتج

$$ds=4a\cos\psi\, d\psi \qquad (4)$$

و بتكامل طرفي (4) نحصل على

$$s=4a\sin\psi+C \qquad (5)$$

حيث C ثابت التكامل ، و يقاس البعد القوسي s من الرأس o نجد أن $s=0$ عندما $\psi=0$ نجد أن $C=0$ و بالتعويض عن الثابت C في (5) نحصل على

$$s=4a\sin\psi \qquad (6)$$

والمعادلة (6) تمثل المعادلة الذاتية لمنحنى السيكلويد.

ملاحظات :

١- عند الناب B تكون $\psi=\frac{\pi}{2}$ و منها $x=\pi a$ ، $y=2a$ ،

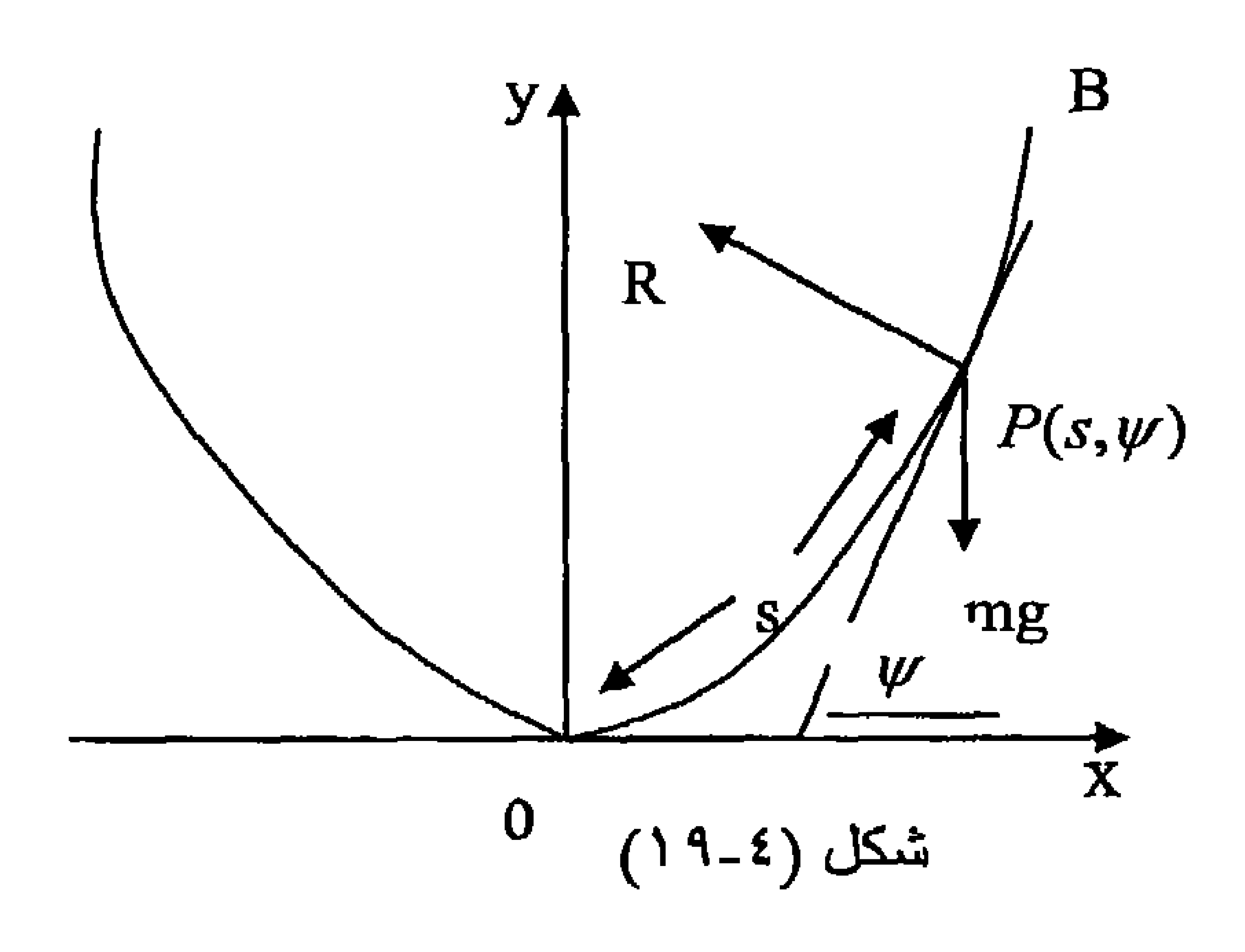
٢- تعرف ρ بنصف قطر التقوس و تساوي $\frac{ds}{d\psi}=4a\cos\psi$ ،

٣- طول القوس $o\widehat{B}=4a$ عند الناب.

٤/١٤- أمثلة :

مثال (١): تتحرك نقطة مادية على سلك منحني على شكل سيكلويد أملس مثبت بحيث يكون محوره رأسياً ورأسه إلى أسفل. فإذا قذفت النقطة على السلك من الداخل من رأس السيكلويد بسرعة v_0 . ادرس الحركة.

الحل :



شكل (٤-١٩)

نفرض أن P موضع النقطة المادية عند اللحظة t

القوى المؤثرة :

١- mg وزن النقطة المادية رأسياً إلى أسفل.

٢- R رد الفعل العمودي على المماس عند P ، كما في الشكل (٤-١٩).

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد s هي

$$m\,\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

و تكون معادلة الحركة في اتجاه العمودي على المماس للداخل هي

$$m\frac{v^2}{\rho} = R - mg\cos\theta \qquad (2)$$

المعادلة الذاتية للسيكلويد

$$s = 4a\sin\psi \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نجد أن

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s \qquad (4)$$

المعادلة (4) هي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$T = -\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \qquad (5)$$

بوضع $\ddot{s} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds}$ في (4) وفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = -\frac{g}{8a}s^2 + C_1 \qquad (6)$$

حيث C_1 ثابت التكامل حيث عند $s = 0$ ،كانت $\dot{s} = v_o$ و من (6) نحصل على $C_1 = \frac{1}{2}v_o^2$ و بالتعويض في (6) نستنتج أن

$$v^2 = -\frac{g}{4a}s^2 + v_o^2 \qquad (7)$$

من المعادلة الذاتية (3) نجد أن

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \qquad (8)$$

و بالتعويض من (7) و (8) في (2) نحصل على رد الفعل على الصورة

$$R = \frac{m}{4a\cos\psi}\left[-\frac{g}{4a}s^2 + v_o^2\right] + mg\cos\psi$$

ولإيجاد سرعة النقطة المادية عند الناب نضع $s = 4a$ في المعادلة (7) نحصل على

$$v = -\sqrt{-4ga + v_o^2} \qquad (9)$$

ولإيجاد العلاقة بين s, t نستخدم المعادلة (7) و نضعها على الصورة

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{v_o^2 - \frac{g}{4a}s^2}$$

حيث إن s تزداد مع الزمن t عند بدء الحركة فإن

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{4a}}\sqrt{\frac{4a}{g}v_0^2-\frac{g}{4a}s^2} \qquad (10)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\sin^{-1}\sqrt{\frac{g}{4a\,v_0^2}}\,s=\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t+C_1 \qquad (11)$$

حيث C_1 ثابت التكامل حيث عند $t=0$ ،كانت $s=0$ و بالتعويض في (11) نحصل على $C_1=0$ و بالتعويض عن قيمة الثابت C_1 في المعادلة (11) نحصل على

$$\sin^{-1}\sqrt{\frac{g}{4a\,v_0^2}}\,s=\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t$$

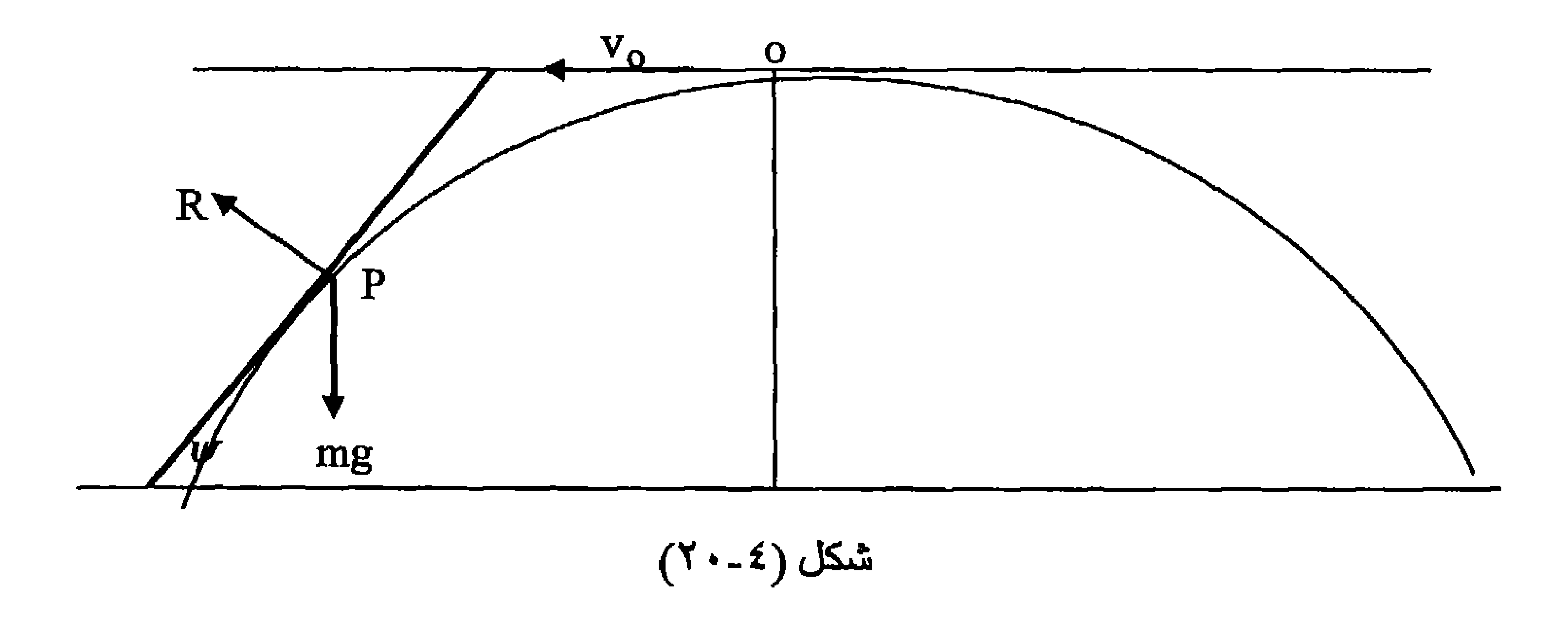
ومنها نستنتج أن

$$s=v_0\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t \qquad (12)$$

المعادلة (12) تعطي العلاقة بين s و t .

مثال (٢): بدأت حلقة كتلتها m الانزلاق بسرعة v_0 من رأس سيكلويد أملس محوره رأسي ورأسه إلى أعلى. اوجد زمن وصول الحلقة إلى الناب.

الحل :



شكل (٤-٢٠)

نفرض أن P موضع الحلقة عند اللحظة t وسرعتها عندئذ v و y بعدها الرأسي من الرأس o. باعتبار مستوى الطاقة مار برأس السيكلويد o و بتطبيق مبدأ ثبوت الطاقة

$$v^2 = v_o^2 + 2gy = v_o^2 + 2ga(1-\cos 2\psi) \quad (1)$$

و يمكن وضع المعادلة (1) على الصورة

$$v^2 = v_o^2 + 2gy = v_o^2 + 4ga\sin^2\psi \quad (2)$$

المعادلة الذاتية لمنحنى السيكلويد هي

$$s = 4a\sin\psi \quad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نجد أن

$$\dot{s}^2 = \frac{g}{4a}\left(s^2 + \frac{4a}{g}v_o^2\right) \quad (4)$$

حيث s تتزايد مع الزمن t فإن

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\sqrt{\left(s^2 + \frac{4a}{g}v_o^2\right)} \quad (5)$$

و لإيجاد العلاقة بين s و t بفصل المتغيرات في (5) والتكامل فإن

$$\sinh^{-1}\sqrt{\frac{g}{4a}}\frac{s}{v_o} = \sqrt{\frac{g}{4a}}t + C \quad (6)$$

حيث C ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية حيث عند $t=0$ كانت $s=0$ نجد أن $C=0$ و بالتعويض عن قيمة الثابت في (6) نحصل على

$$\sinh^{-1}\sqrt{\frac{g}{4a}}\frac{s}{v_o} = \sqrt{\frac{g}{4a}}t \quad (7)$$

ولإيجاد زمن الوصول إلى الناب نضع $s = 4a$ في (7) نحصل على

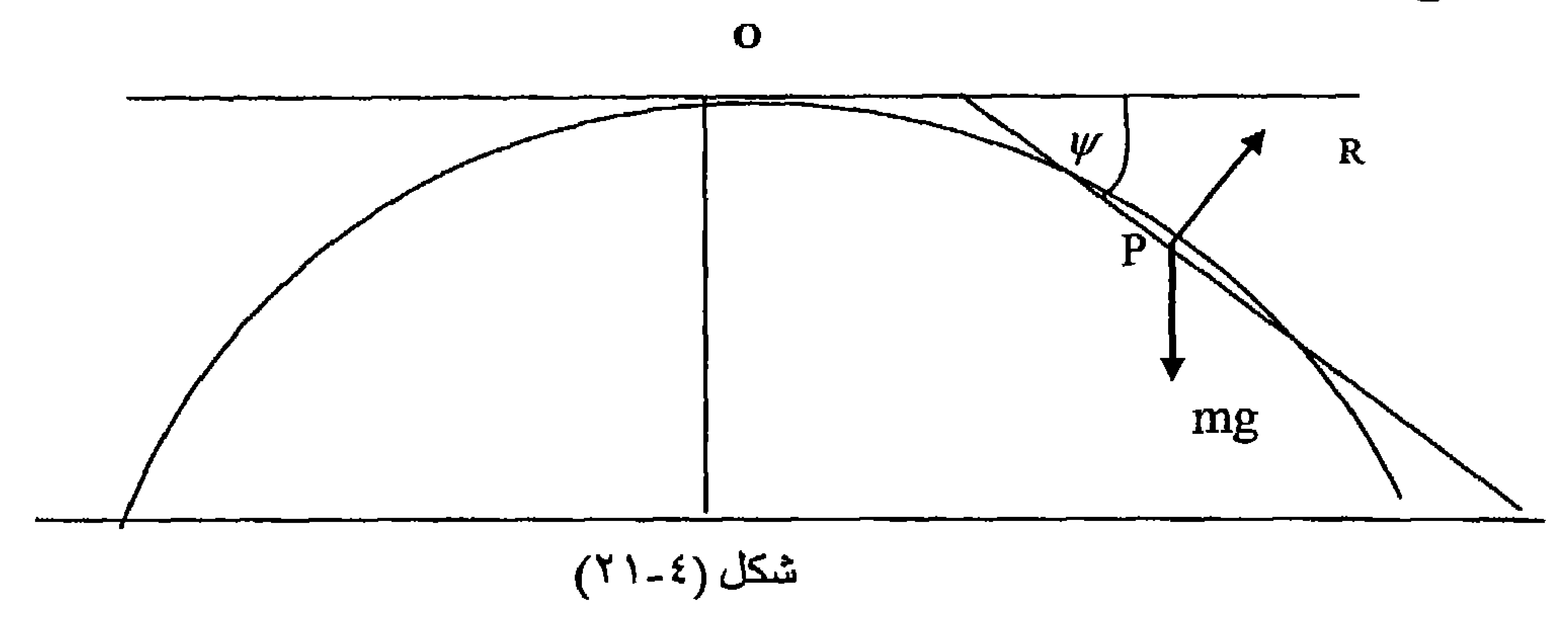
$$t_{s=4a} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{g}{4a}}\frac{4a}{v_o} \quad (8)$$

ومنها نجد أن

$$t_{s=4a} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\ln\left(\frac{2\sqrt{ag}}{v_o} + \sqrt{\frac{4ag}{v_o^2}}\right)$$

مثال (٣): ثني سلك أملس على شكل سيكلويد ثم ثبت بحيث يكون محوره رأسياً ورأسه إلى أعلى ثم وضع جسيم صغير لينزلق على السلك من الخارج. فإذا بدأت الحركة من سكون عندما كان الجسيم عند رأس السيكلويد. اثبت أن الجسيم يترك السلك عندما يكون متحركاً في اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع الأفقي.

الحل :



شكل (٤-٢١)

نفرض أن P موضع النقطة المادية عند اللحظة t

القوى المؤثرة:

١- mg وزن النقطة المادية رأسياً إلى أسفل.

٢- R رد الفعل العمودي على المماس عند P ، كما في الشكل (٤-٢١).

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد s هي

$$m\,\ddot{s} = mg\sin\psi \qquad (1)$$

و تكون معادلة الحركة في اتجاه العمودي على المماس للداخل هي

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\theta - R \qquad (2)$$

المعادلة الذاتية للسيكلويد

$$s = 4a\sin\psi \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نجد أن

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s \qquad (4)$$

بوضع $\ddot{s} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds}$ في (4) وفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = \frac{g}{8a}s^2 + C_1 \qquad (5)$$

حيث C_1 ثابت التكامل حيث عند $s = 0$ ،كانت $\dot{s} = v_0$ و من (6) نحصل على $C_1 = 0$ و بالتعويض في (5) نستنتج أن

$$v^2 = \frac{g}{4a}s^2 \qquad (6)$$

من المعادلة الذاتية (3) نجد أن

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \qquad (7)$$

و بالتعويض من (6) و (7) في (2) نحصل على رد الفعل على الصورة

$$R = mg\cos\psi - mg\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi} \qquad (8)$$

و يمكن وضع رد الفعل المعطى على الصورة

$$R = mg\left(\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{\cos\psi}\right) \qquad (9)$$

الجسيم يترك السلك عندما $R = 0$ ، من (9) نجد أن

$$\cos^2\psi - \sin^2\psi = 0$$

أي أن

$$\tan^2\psi = 1$$

ومنها $\psi = \frac{\pi}{2}$

٤/١٥: تمارين :

١. تتحرك نقطة مادية على المنحنى $x^2 = 4ay$. أثبت أن الضغط على المنحنى يكافيء $\frac{m}{\rho}\left(v_0^2 - 2ag\right)^2$ حيث ρ نصف قطر التقوس، v_0 السرعة عند النقطة $(0,0)$.

٢. سلك على شكل $y = \sin\psi$ وضع في مستوى رأسي وتنزلق عليه حلقة كتلتها m . فإذا علم أنها بدأت الحركة من سكون من النقطة $x = \frac{\pi}{4}$. اوجد الضغط الواقع على السلك عندما تمر الحلقة بالنقطتين $(0,0)$ ، $(-\frac{\pi}{2},-1)$.

٣. أنبوبة رفيعة على هيئة قطع مكافيء معادلته $x^2 = 4ay$ موضوعة في مستوى رأسي. قذف جسيم كتلته m من رأس القطع بسرعة مقدارها v_0 وواصل سيره داخل الأنبوبة. اثبت أن $\rho R = \text{constant}$ عند أي موضع، حيث ρ نصف قطر الانحناء، R رد الفعل العمودي للأنبوبة عند هذا الموضع. اوجد قيمة هذا الثابت.

٤. قذفت نقطة مادية بسرعة v_0 من أعلى نقطة سكلويد أملس محوره رأسي ورأسه إلى أسفل في اتجاه المماس لهذا المنحنى. اثبت أن الزمن اللازم لكي تصل فيه هذه النقطة إلى رأس السيكلويد هي $\sqrt{\frac{4a}{g}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{4ag}}{v_0}$ حيث a نصف قطر الدائرة الرأسية.

٥. تتحرك نقطة مادية من سكون أسفل سيكلويد محوره رأسي ورأسه إلى أسفل. اوجد سرعة النقطة ورد الفعل عليها عند أي موضع وأثبت أن الزمن الذي تأخذه في قطع النصف الأول من المسافة الرأسية يساوي الزمن الذي تأخذه في قطع النصف الثاني.

٦. تنزلق حلقة على سلك منحنى مستوي رأسي معادلته $y = \sinh\frac{x}{a}$ ، حيث محور السينات أفقي ومحور الصادات رأسي إلى أسفل. إذا بدأت الحلقة الحركة من السكون من موضع يصنع عنده المماس مع الأفقي زاوية α . اثبت أنها تترك السلك بعد أن تهبط مسافة رأسية تساوي $a\sec\alpha$.

٧. نقطة مادية تتحرك على منحنى وكانت عجلتها في اتجاه المماس تساوي عجلتها في الاتجاه العمودي وكان المماس يدور بسرعة زاوية ω ثابتة. اوجد معادلة المسار.

٨. أنبوبة ملساء دائرية المقطع ثُبتت على شكل سيكلويد $y = 4a\sin\psi$ وثُبتت بحيث كان رأسه إلى أسفل ومحوره رأسياً. قُذف جسيم صغير داخل الأنبوبة أفقياً من رأس السيكلويد بسرعة $\sqrt{3mg}$. أثبت أن الجسيم يصل عند فوهة الأنبوبة (ناب السيكلويد) بسرعة $\sqrt{5mg}$.

الفصل الخامس

المســارات المركزيــة

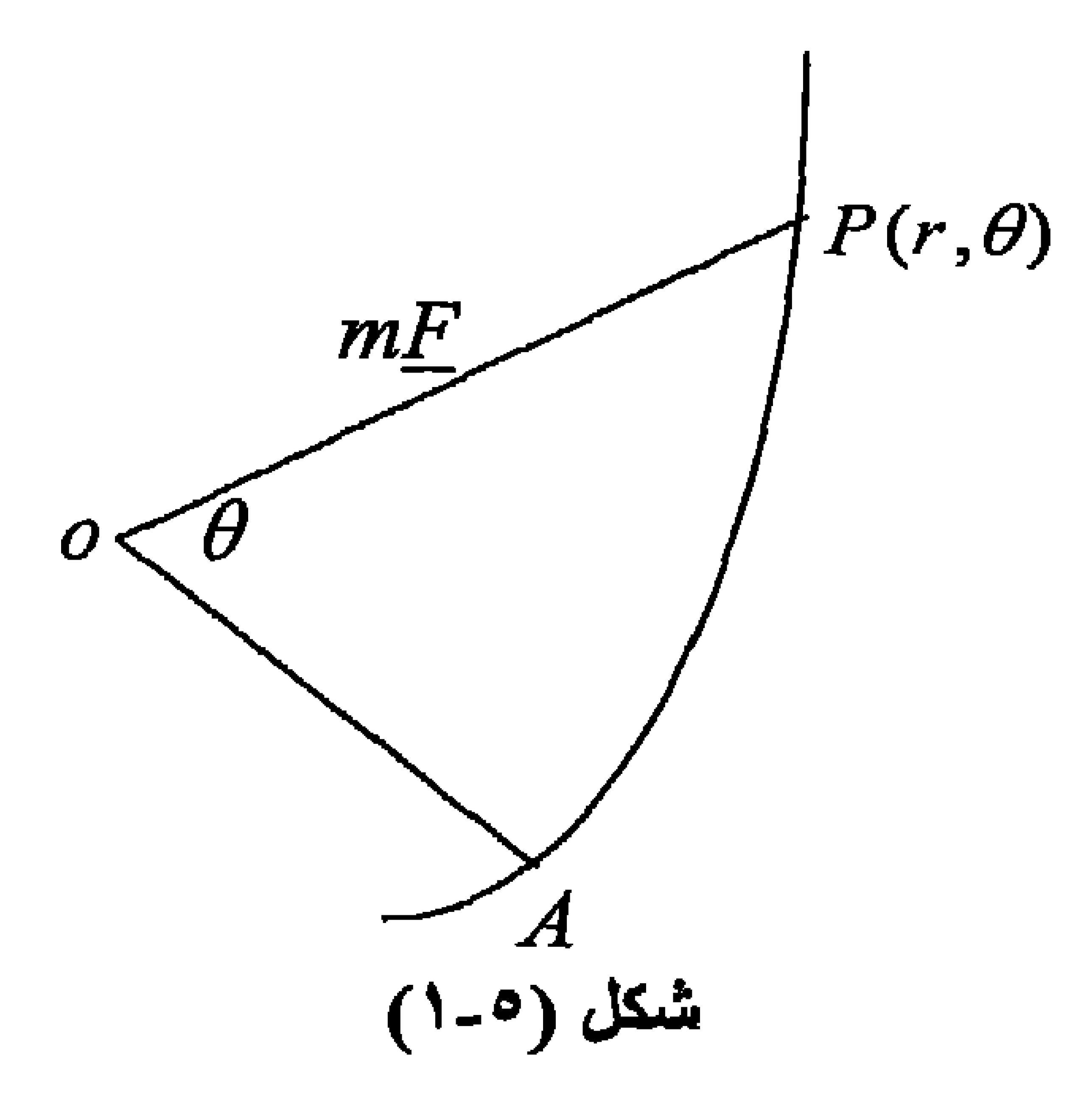
Central Orbits

مقدمة :

في هذا الفصل سندرس حركة الأجسام الواقعة تحت تأثير قوى مركزية و التي لها أهمية كبرى في علم الفلك و الميكانيكا السماوية و لذلك سوف نستنتج قانون القوة المركزية و أيضا قانون السرعة و بعض التطبيقات على المسارات المركزية و أهميتها في دراسة حركة المجموعة الشمسية و الأقمار الصناعية حول الأرض.

٥/١- تعريف :

المسار المركزي هو المنحنى الذي ترسمه نقطه مادية تتحرك تحت تأثير قوة جاذبة (أو طارده) نحو مركز ثابت، انظر شكل (٥-١)



شكل (٥-١)

أمثله على ذلك

أ. حركة الأقمار الصناعية حول الأرض،

ب. حركة الالكترونات حول النواة،

ج. حركة الأرض وجميع الكواكب السيارة حول الشمس.

٥/٢- دراسة الحركة :

نفرض أن نقطة مادية كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة مركزيه جاذبة مقدارها F لوحدة الكتل نحو مركز ثابت o ، أنظر شكل (٥-١)، و لدراسة الحركة نفرض أن

$P(r,\theta)$ موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t وباختيار مركز الجذب o قطب ، oA خط ابتدائي فإن مركبتي السرعة للنقطة المادية هي

$$\vec{v}=(\dot{r},r\dot{\theta}) \qquad (1)$$

أيضا مركبتا العجلة هما

$$\vec{a}=\left[(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2),\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right] \qquad (2)$$

القوه المؤثرة: mF هي قوة الجذب في اتجاه $\overrightarrow{po}$

معادلتا الحركة:

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-mF \qquad (3)$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \qquad (4)$$

من (4) نستنتج

$$r^2\dot{\theta}=h \qquad (5)$$

حيث h ثابت المعادلتان (3) و (4) لا يكفيان لتعيين المجاهيل الثلاث r , θ , F وأيضا المعادلتان تتضمنان الزمن (بطريقة غير مباشرة) و لحذف الزمن بين هاتين المعادلتين نستخدم المتغير

$$u=\frac{1}{r} \qquad (6)$$

من (٦) نستنتج

$$\frac{dr}{du}=-\frac{1}{u^2} \qquad (7)$$

و من (5) و (6) نجد أن

$$\dot{\theta}=hu^2 \qquad (8)$$

أيضا

$$\dot{r}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

باستخدام (7) و (8) نجد أن

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta} \tag{9}$$

أيضا

$$\ddot{r} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} \tag{10}$$

و باستخدام (8) نحصل على $\ddot{r}$ على الصورة

$$\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{11}$$

بالتعويض من (6)،(8)،(11) في (1) نجد أن

$$-h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -F \tag{12}$$

و بالاختصار و الاختزال نجد أن المعادلة تكون على الصورة

$$h^2 u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = F \tag{13}$$

والمعادلة (13) تسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي أو قانون القوة .

قانون السرعة:

سرعة النقطة المادية هي

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \tag{14}$$

بالتعويض من (8)،(9)،(10) في (14) نجد أن

$$v^2 = h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}h^2u^4$$

و بالاختصار و الاختزال نجد أن مربع قانون السرعة في المسارات المركزية يكون على الصورة

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \tag{15}$$

وهناك نوعان من التطبيقات

(1) إذا علمت معادلة المسار أي العلاقة بين (r,θ) فإنه يمكن إيجاد قانون القوة ،
(2) إذا علم قانون القوة فإنه يمكن إيجاد معادلة المسار $r=f(\theta)$.

٣/٥- أمثلة :

مثال (١): تتحرك نقطة مادية في قطع ناقص معادلته القطبية هي $r=\dfrac{L}{1+e\cos\theta}$

حيث $2L$ طول الوتر البؤري العمودي، e الاختلاف المركزي، تحت تأثير قوة جاذبة مركزية في إحدى بؤرتيه. أثبت أن القوة المركزية المؤثرة عليه تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن هذه البؤرة ثم أوجد سرعة النقطة عند أي موضع .

الحل :

قانون القوة لوحدة الكتل

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=F(u) \qquad (1)$$

معادلة المسار

$$r=\frac{L}{1+e\cos\theta} \qquad (2)$$

و منها

$$u=\frac{1}{L}+\frac{e}{L}\cos\theta \qquad (3)$$

من (٣) نستنتج أن

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{e}{L}\sin\theta,\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2}=-\frac{e}{L}\cos\theta \qquad (4)$$

بالتعويض من (4)،(3) في (1) نجد أن

$$F(u)=h^2u^2\left[-\frac{e}{L}\cos\theta+\frac{1}{L}+\frac{e}{L}\cos\theta\right]$$

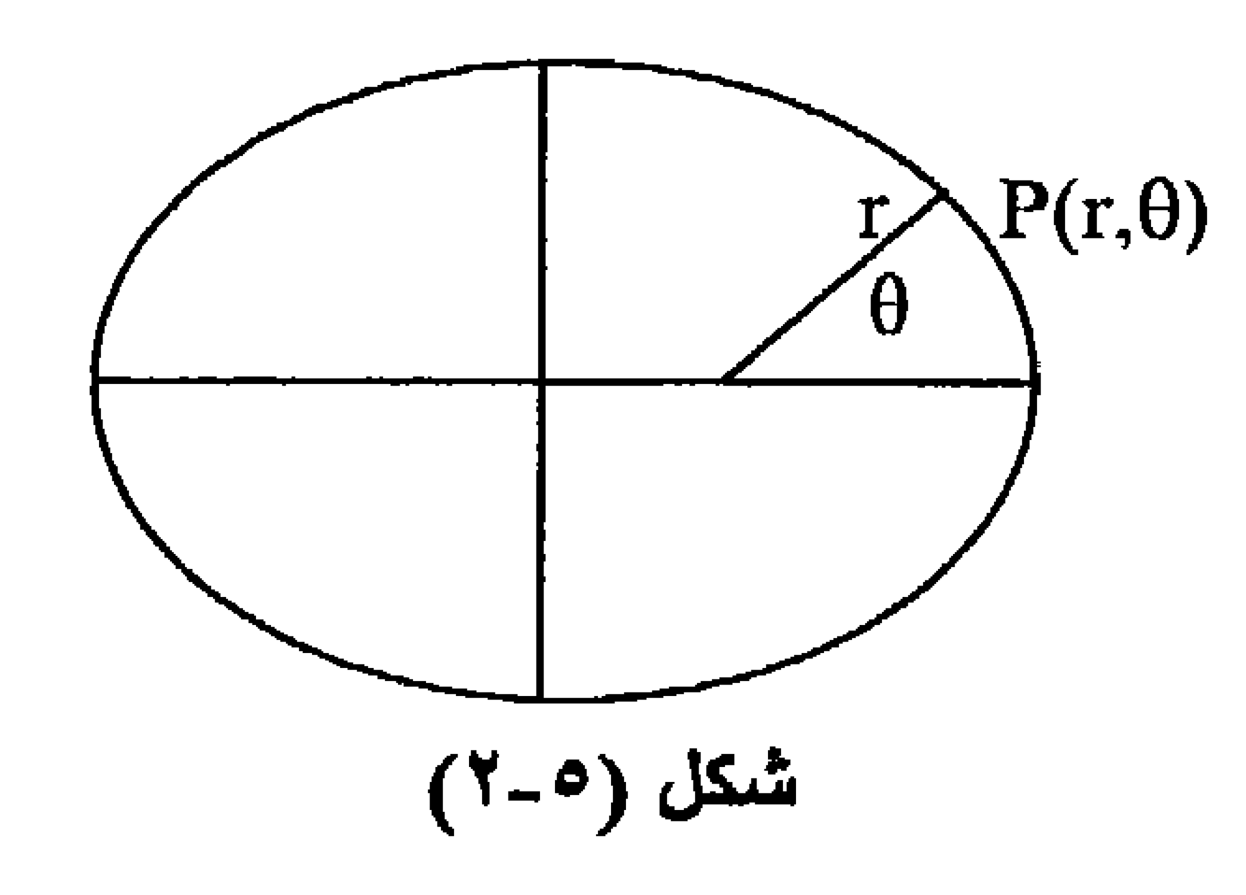
و منها نستنتج

$$F(u)=\frac{h^2}{L}u^2 \qquad (5)$$

و بالتعويض عن $u=\dfrac{1}{r}$ في (5) و حيث $u=\dfrac{h^2}{L}$ مقدار ثابت فإننا نستنتج أن

$$F(r) \propto \frac{1}{r^2} \tag{6}$$

نستنتج من (6) أن القوة المركزية تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن إحدى البؤرتين انظر الشكل (٥-٢) ،



شكل (٥-٢)

حيث قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \tag{7}$$

بالتعويض من (3)، (4) في (7) نستنتج أن

$$v^2 = h^2\left[\frac{e^2}{L^2}\sin^2\theta + \frac{1}{L^2} + \frac{e^2}{L^2}\cos\theta + \frac{2e}{L}\cos\theta\right] \tag{8}$$

و باستخدام (3) يمكن وضع (8) على الصورة الآتية

$$v^2 = h^2\left[\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{L}\right] \tag{9}$$

العلاقة (9) تعطي سرعة النقطة المادية عند أي موضع و التي يمكن وضعها على الصورة

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \tag{10}$$

حيث

$$a = \frac{L}{1-e^2}, \quad \mu = \frac{h^2}{L} \tag{11}$$

و نلاحظ من (11) في حالة القطع الناقص

$$v < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

أما في حالة القطع الزائد فإن

$$v > \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

و لكن في حالة القطع المكافئ

$$v < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

مثال(٢) : يتحرك جسيم على مسار مركزي معادلته $r^n = a^n \cos n\theta$ حيث n, a ثوابت اوجد قانون القوة المركزية المؤثرة على ا لجسيم ،اوجد كذلك قانون السرعة .

الحل :

$$r^n = a^n \cos\theta \qquad (1)$$

و حيث $u = \frac{1}{r}$ و من (1) نجد أن

$$u^n = \frac{1}{a^n} \sec n\theta \qquad (2)$$

و بتفاضل طرفي (2) بالنسبة إلى θ نجد أن

$$n u^{n-1} \frac{du}{d\theta} = \frac{n}{a^n} \sec n\theta \tan n\theta \qquad (3)$$

و باستخدام (2) في (3) نستنتج

$$\frac{du}{d\theta} = u \tan n\theta \qquad (4)$$

و بتفاضل (4) بالنسبة إلي θ نجد أن

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = n u \sec^2 n\theta + \frac{du}{d\theta} \tan n\theta \qquad (5)$$

و بالتعويض عن $\frac{du}{d\theta}$ من (4) في (5) نحصل

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = n u \sec^2 n\theta + u \tan^2 n\theta \qquad (6)$$

و باستخدام العلاقة $\sec^2 n\theta = 1 + \tan^2 n\theta$ في (6) نستنتج أن

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = (n+1)u\sec^2 n\theta \qquad (7)$$

أيضا من (2) يمكن وضع (7) نجد أن

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = (n+1)a^{2n} u^{2n+1} \qquad (8)$$

قانون القوة هو

$$F(u) = h^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right] \qquad (9)$$

باستخدام (8) في (9) و نستنتج

$$F(u) = h^2 (n+1) a^{2n} u^{2n+3} \qquad (10)$$

والمعادلة (10) تمثل قانون القوة كدالة في u و منها يكون القوة كدالة في r على الصورة

$$F(r) = h^2 (n+1) a^{2n} \frac{1}{r^{2n+3}} \qquad (11)$$

ولإيجاد قانون السرعة نعلم أن

$$v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad (12)$$

و بالتعويض من(2) في (12) نجد أن

$$v^2 = h^2 \left[u^2 \tan^2 n\theta + u^2\right] \qquad (13)$$

من (1) نستنتج أن

$$v^2 = h^2 a^{2n} u^{2n+2} \qquad (14)$$

أي أن

$$v = \frac{h a^n}{r^{n+1}} \qquad (15)$$

و العلاقة تمثل قانون السرعة للنقطة المادية عند أي لحظة.

مثال(٣): تتحرك نقطة مادية فى مستوى تحت تأثير قوة جاذبة مركزية. أوجد قانون القوة المركزية واوجد كذلك قانون السرعة إذا كان المسار هو المنحنى $r=a e^{\theta}$ حيث a ثابت.

الحل :

معادلة المسار

$$r=a e^{\theta} \qquad (1)$$

و حيث $u=\frac{1}{r}$ و من (1) نجد أن

$$u=\frac{1}{a}e^{-\theta} \qquad (2)$$

قانون القوة هو

$$F(u)=h^2 u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] \qquad (3)$$

من (2) نستنتج أن

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{a}e^{-\theta}\ ,\ \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{a}e^{-\theta}=u \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3) نجد أن

$$F(u)=h^2 u^2(u+u)=2h^2 u^3 \qquad (5)$$

و بالتعويض عن $u=\frac{1}{r}$ في (5) نستنتج قانون القوة كدالة في r يكون

$$F(r)=\frac{2h^2}{r^3} \qquad (6)$$

و حيث h مقدار ثابت فإننا نستنتج أن $F(r)\propto\frac{1}{r^3}$ أي أن القوة المركزية تتناسب عكسيا مع مكعب بعد النقطة المادية عن مركز الجذب.

أيضا نعلم قانون السرعة

$$v^2=h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] \qquad (7)$$

و بالتعويض من(2) و (4) في (7) نجد أن

$$v^2 = h^2\left[\frac{1}{a^2}e^{-2\theta} + \frac{1}{a^2}e^{-2\theta}\right] = \frac{2h^2}{a^2}e^{-2\theta} \qquad (8)$$

و باستخدام (2) و بوضع $u = \frac{1}{r}$ في (8)

$$v^2 = \frac{2\mu}{r^2} \quad , \mu = 2h^2 \qquad (9)$$

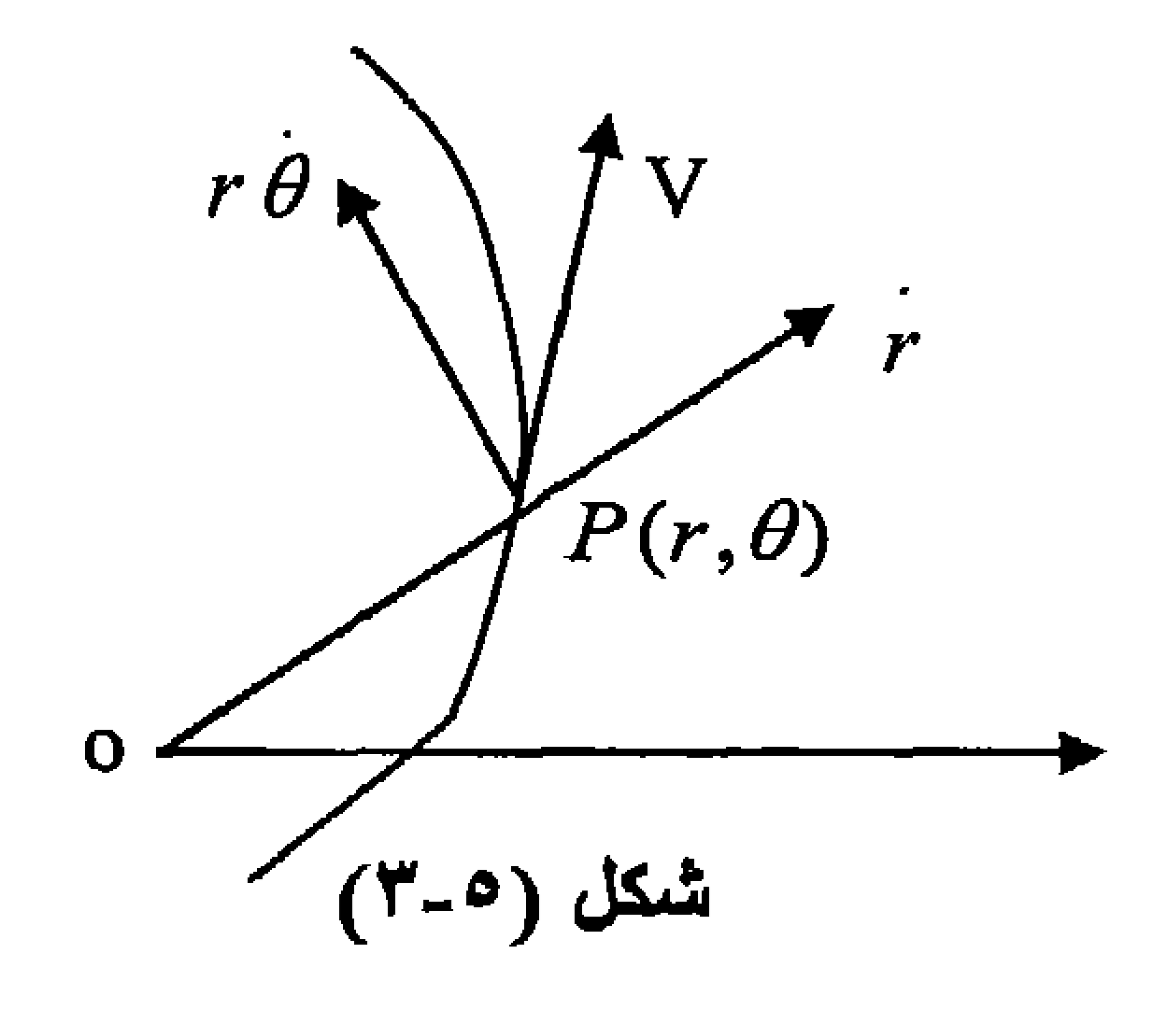
و من (9) نستنتج سرعة النقطة المادية عند أي موضع هي

$$v = \frac{\sqrt{2\mu}}{r}$$

وهو المطلوب الثاني.

٤/٥–المعنى الطبيعي للثابت *h* :

أ–هي كمية الحركة الزاوية لوحدة الكتل:



شكل (٥-٣)

باعتبار نقطة المادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية و $P(r,\theta)$ موضعها عند اللحظة t انظر الشكل (٥-٣) و تكون مركبتي السرعة كما في الشكل هما:

$$v_r = \dot{r} \, , \, v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (1)$$

فإن عزم السرعة حول o هو

$$v_\theta . r = r\dot{\theta} . r = r^2\dot{\theta} \qquad (2)$$

نستنتج من (2) أن عزم كمية الحركة حول o هي

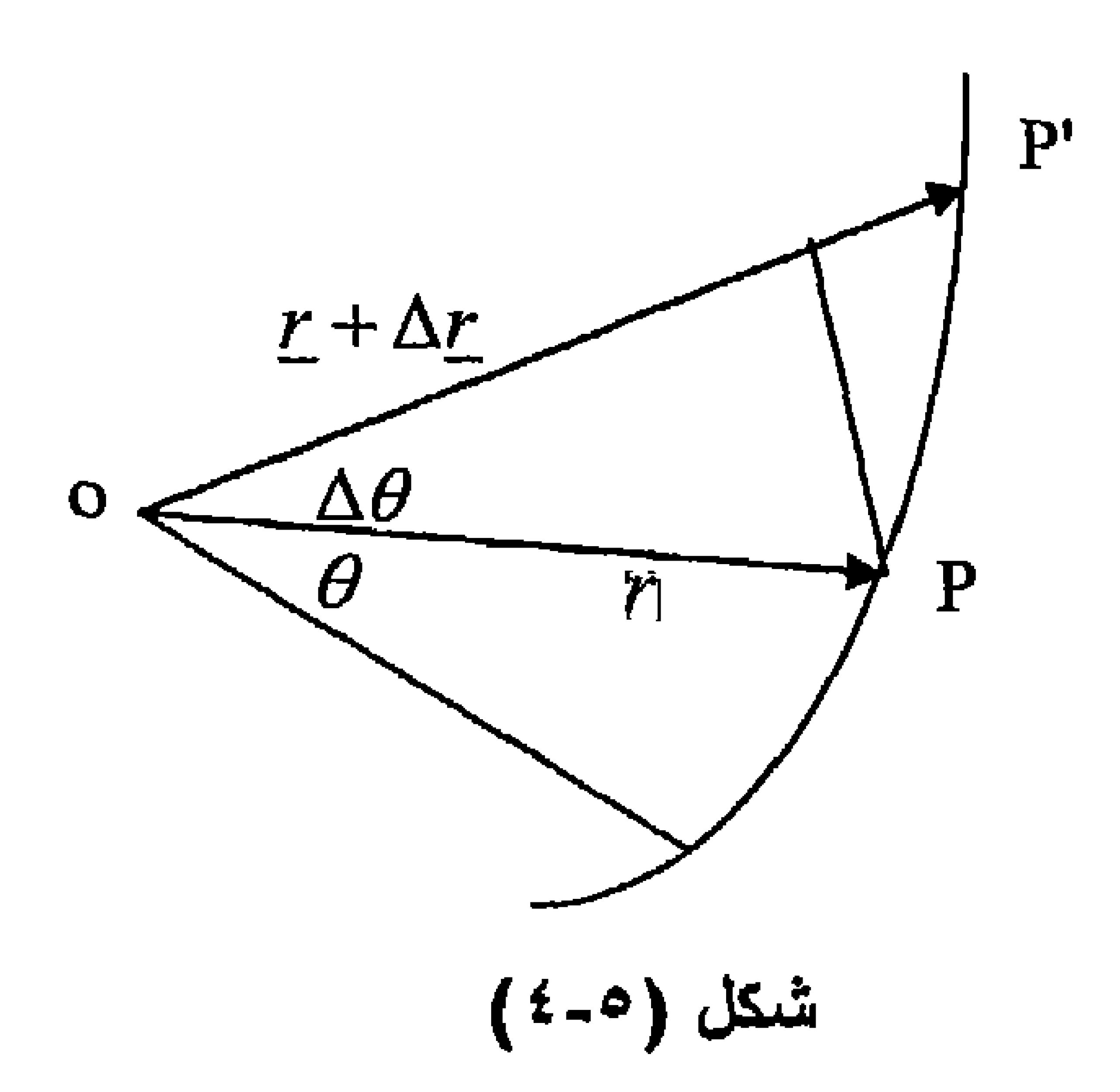
$$m r^2\dot{\theta} \qquad (3)$$

و لكن

$$h = r^2\dot{\theta} \qquad (4)$$

نستنتج من (3) و (4) أن الثابت h يساوي كمية الحركة لوحدة الكتل أو عزم كمية الحركة الزاوية لوحدة الكتل.

ب- h هو ضعف السرعة المساحية :



شكل (٥-٤)

تعرف السرعة المساحية بأنها معدل تغير المساحة بالنسبة الزمن نفرض أن $P(r,\theta)$ موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t وان موضعها عند اللحظة $t+\Delta t$ هو $P(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ أنظر الشكل (٥-٤) ، فيكون المساحة التي مسحها نصف قطر المتجه $o\hat{P}$ في الفترة الزمنية Δt هى القطاع oPP'، فإن

مساحة القطاع $oPP' = \Delta A = \frac{1}{2} r.r\Delta\theta$

فإن السرعة المساحية σ تكون

$$\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \qquad (1)$$

أيضا نعلم أن

$$h = r^2 \dot{\theta} \qquad (2)$$

بمقارنة (1) و (2) نستنتج أن

$$h = 2\sigma \qquad (3)$$

نستنتج من (3) أن الثابت h هو ضعف السرعة المساحية.

٥/٥- تعيين الزمن اللازم لقطع جزء من المسار المركزي :

للحصول على الزمن الذي يرسمه نصف قطر المتجه $\vec{r}$ ، نعلم أن

$$h = r^2\dot{\theta} \qquad (1)$$

أيضا معادلة المسار

$$r = f(\theta) \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (3) بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$h\,t = \int_0^{\alpha} r^2\, d\theta \qquad (3)$$

حيث α هي الزاوية التي يصنعها نصف قطر المتجه مع المستقيم الثابت عند اللحظة t

و بالتعويض عن θ بدلالة r من (2) في (3) نحصل على الزمن المطلوب و هو

$$t = \frac{1}{h}\int_0^{\alpha} [f(\theta)]^2\, d\theta$$

٦/٥- أمثلة :

مثال (1): إذا علم أن العجلة في مسار مركزي هي $\mu u^3(3+2a^2u^2)$ وأن النقطة المادية قذفت من على بعد $r=a$ بالسرعة $\sqrt{\frac{5\mu}{a^2}}$ في اتجاه يصنع زاوية $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ مع الخط الابتدائي. اثبت أن معادلة المسار هي $r = a\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ حيث μ ثابت.

الحل :

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي:

$$F(u) = h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \qquad (1)$$

و بالتعويض عن القوة المعطاة نحصل على

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu u^3\left(3 + 2a^2u^2\right) \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $2\frac{du}{d\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\mu\left(3u^2+a^2u^4\right)+C_1 \qquad (3)$$

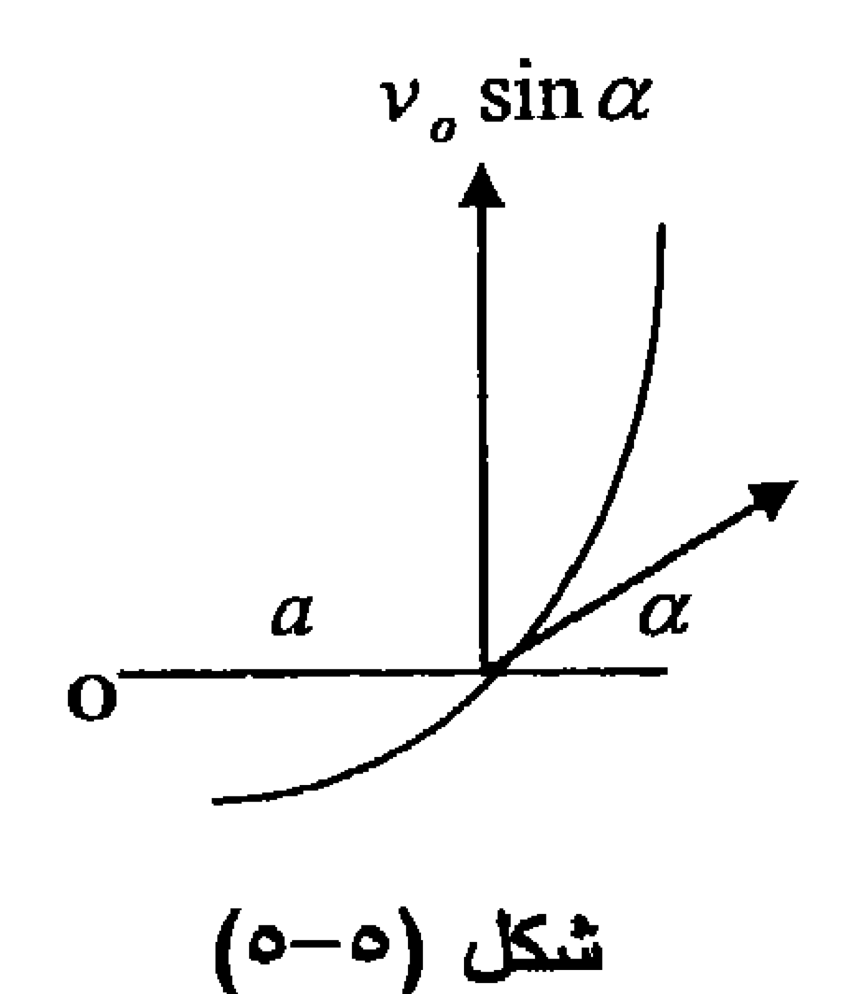
حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t=0$ كانت $u=\frac{1}{a}$ ، $v=\sqrt{\frac{5\mu}{a^2}}$ و بالتعويض في (3)

$$\frac{5\mu}{a^2}=\mu\left(\frac{3}{a^2}+\frac{a^2}{a^4}\right)+C_1$$

، ومنها نحصل على

$$C_1=\frac{\mu}{a^2} \qquad (4)$$

أيضا لتعيين الثابت h من الشكل (٥-٥) فإن



شكل (٥-٥)

$$h=(v_o\sin\alpha).a=\left(\frac{\sqrt{5\mu}}{a}.\frac{1}{\sqrt{5}}\right).a=\sqrt{\mu} \qquad (5)$$

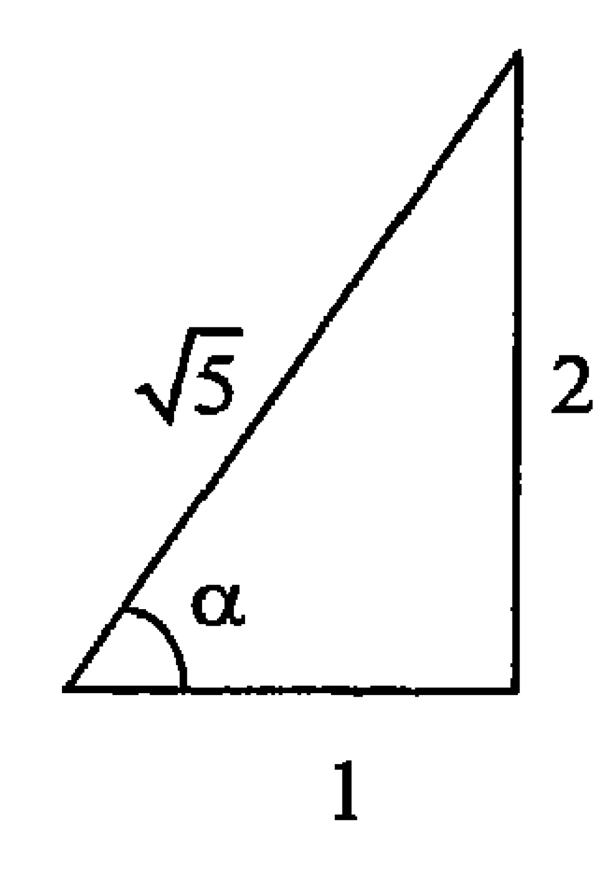
بالتعويض عن C_1 و h من (4) ، (5) في (3) نجد أن

$$\mu\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\mu\left(3u^2+a^2u^4\right)+\frac{\mu}{a^2} \qquad (6)$$

و من (6) نستنتج

$$\frac{du}{d\theta}=\pm\sqrt{2u+a^2u^4+\frac{1}{a^2}}=\pm\sqrt{\left(au^2+\frac{1}{a^2}\right)^2}=-\left(au^2+\frac{1}{a^2}\right) \quad (7)$$

ولاختبار الإشارة حيث r تتزايد مع θ فإن u تتناقص مع تزايد θ فإننا نختار الإشارة السالبة



و بفصل المتغيرات في (7) و التكامل نحصل على

$$-\int \frac{du}{au^2+a^{-1}}=\int d\theta \quad (8)$$

و من (8) ونتيجة التكامل هي

$$\cot^{-1}au=\theta+C_2 \quad (9)$$

حيث C_2 ثابت التكامل، يتعين من الشروط الابتدائية ، أي عند $t=0$ كانت $u=\frac{1}{a}$ ، $\theta=0$ و بالتعويض في (9) نجد أن $C_2=\frac{\pi}{4}$ و بالتعويض عن الثابت في (9) نجد أن

$$\cot^{-1}au=\theta+\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{1}{a}\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

و بوضع $u=\frac{1}{r}$ في المعادلة (10) نجد أن معادلة المسار تكون على الصورة

$$r=a\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \quad (11)$$

مثال (٢): تتحرك نقطة مادية تحت تأثير القوة المركزية الجاذبة $F=\mu u^3$ لوحدة الكتل حيث μ ثابت ،فإذا قذفت النقطة من موضع على بعد μ من مركز الجذب بسرعة

$\frac{1}{a}\sqrt{\mu}$ في اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع نصف قطر المتجه، أثبت أن معادلة المسار هي $r = a e^{\theta}$، وأن الزمن الذي تأخذه حتى تكون على بعد r من المركز هو $r^2 - \frac{a^2}{\sqrt{2\mu}}$.

الحل :

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي:

$$F(u) = h^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \qquad (1)$$

و بالتعويض عن القوة المعطاة نحصل على

$$h^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu u^3 \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $2\frac{du}{d\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن

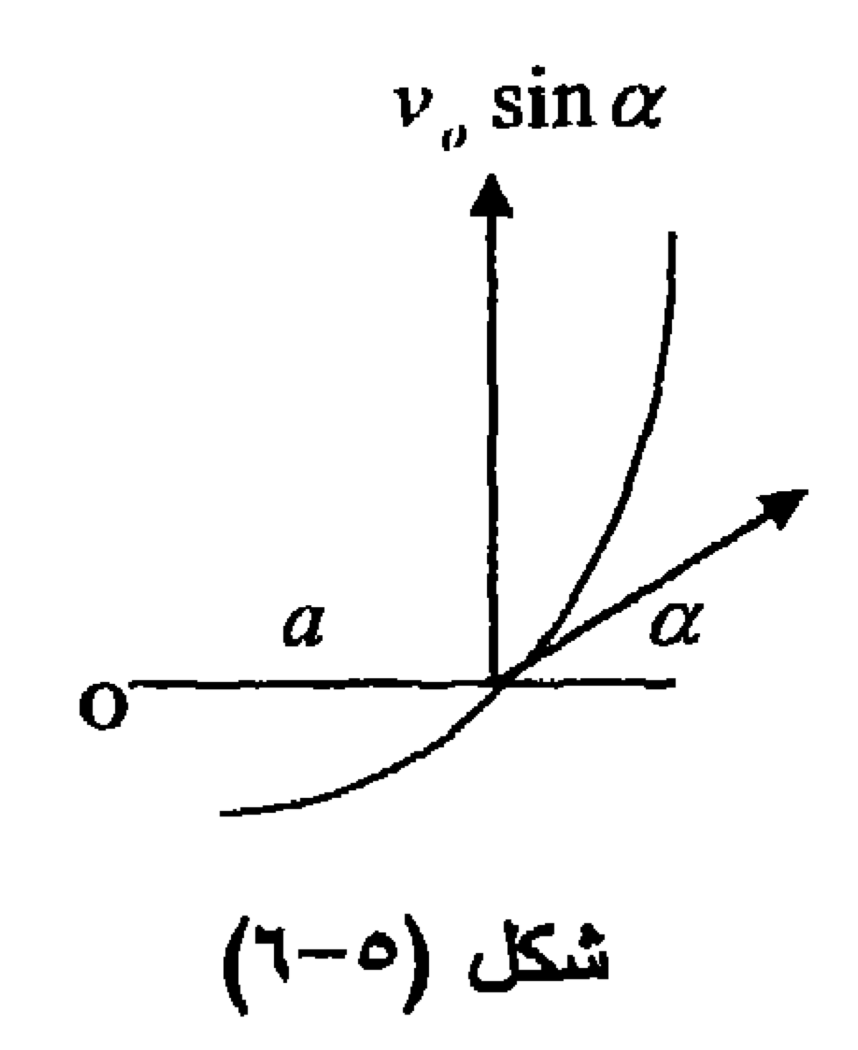
$$h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \mu u^2 + C_1 \qquad (3)$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$،

$v = \sqrt{\frac{\mu}{a^2}}$ و بالتعويض في (3)

$\frac{\mu}{a^2} = \frac{\mu}{a^2} + C_1$ ، ومنها نحصل على

$$C_1 = 0 \qquad (4)$$



شكل (٥-٦)

أيضا لتعيين الثابت h من الشكل (٥-٦) فإن

$$h=(v_o \sin\alpha).r_o=\left(\frac{\sqrt{\mu}}{a}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right).a=\sqrt{\frac{\mu}{2}} \qquad (5)$$

بالتعويض عن C_1 و h من (4) ، (5) في (3) نجد أن

$$\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\mu u^2 \qquad (6)$$

و من (6) نستنتج

$$\frac{du}{d\theta}=\pm u \qquad (7)$$

ولاختبار الإشارة حيث r تتزايد مع θ فإن u تتناقص مع تزايد θ فإننا نختار الإشارة السالبة

و بفصل المتغيرات في (7) و التكامل نحصل على

$$\int \frac{du}{u}=-\int d\theta \qquad (8)$$

و من (8) و نتيجة التكامل هي

$$\ln u=-\theta+C_2 \qquad (9)$$

حيث C_2 ثابت التكامل، يتعين من الشروط الابتدائية ، أي عند $t=0$ كانت $u=\frac{1}{a}$ ، $\theta=0$ و بالتعويض في (9) نجد أن $C_2=\ln\frac{1}{a}$ و بالتعويض عن الثابت في (9) نجد أن

$$\ln au = -\theta \Rightarrow au = e^{-\theta} \qquad (10)$$

و بوضع $u = \frac{1}{r}$ في المعادلة (10) نجد أن معادلة المسار تكون على الصورة

$$r = a e^{-\theta} \qquad (11)$$

المعادلة (11) هل معادلة المسار المطلوبة.

ولإيجاد الزمن الذي تأخذه النقطة المادية حتى تكون على بعد r من المركز نستخدم معادلة عزم كمية الحركة منها

$$t = \frac{1}{h}\int r^2 \, d\theta + C_3 \qquad (12)$$

بالتعويض من (5) و (11) في (12) و التكامل نحصل على

$$t = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\, e^{2\theta} + C_3 \qquad (13)$$

حيث C_3 ثابت التكامل، يتعين من الشروط الابتدائية ، أي عند $t = 0$ كانت $\theta = 0$ و بالتعويض في (13) و منها نحصل على

$$C_3 = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} a^2 \qquad (14)$$

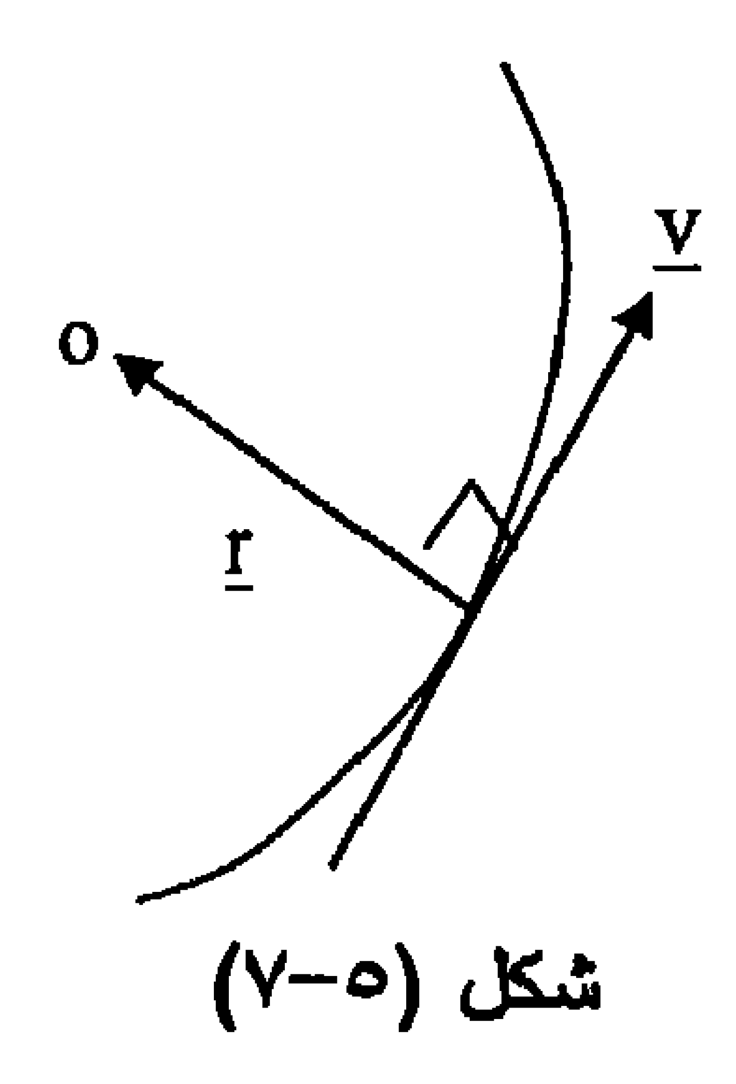
و بالتعويض من (14) في (13) نحصل علي الزمن الذي تأخذه النقطة المادية حتى تكون على بعد r من المركز و هو

$$t = \frac{r^2 - a^2}{\sqrt{2\mu}}$$

٥/٧- القبا (الابس) والأبعاد القبوية Apse and apsidal distances :

تعريف: القبا هي النقطة التي تكون على المسار المركزي عندها يكون اتجاه السرعة عمودي على نصف قطر المتجه ويسمى بعد القبا عن مركز القوة بالبعد القبوي.

الشرط الرياضي للقبا :



شكل (٥–٧)

من الشكل (٥–٧) عند القبا تكون

$$h = v r \qquad (1)$$

من قانون السرعة

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نحصل على

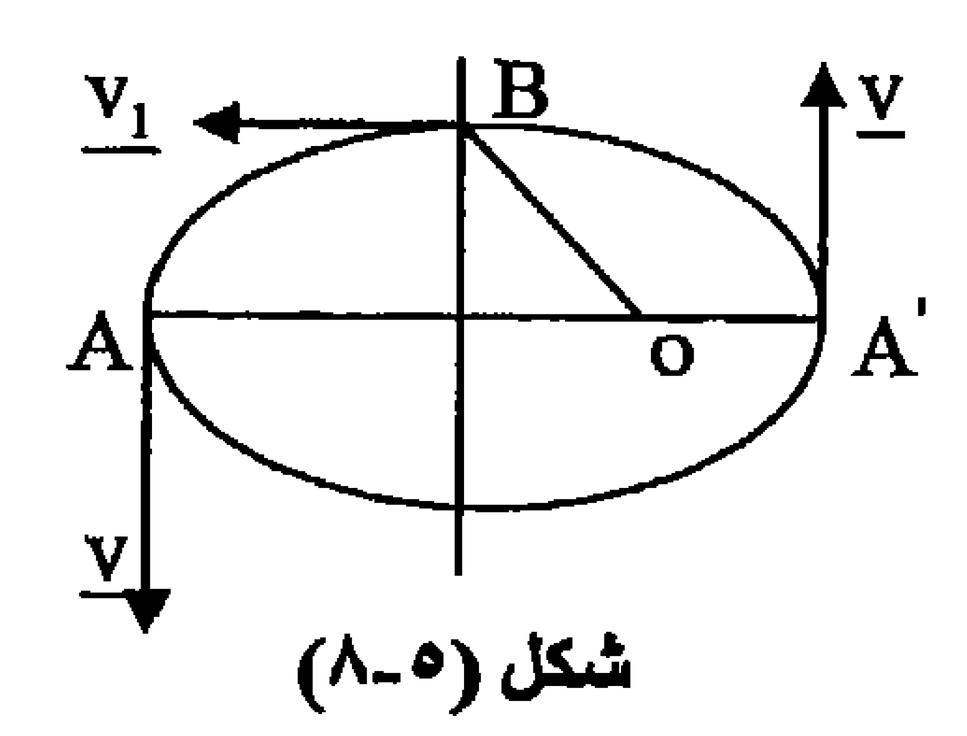
$$h^2 u^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad (3)$$

و من (3) نستنتج أن عند القبا

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \qquad (4)$$

أي عند القبا تكون u نهاية عظمى أو صغرى أي تكون r نهاية صغرى أو عظمى.

فمثلا:



شكل (٥-٨)

من الشكل (٥-٨) يوجد على القطع الناقص قباوان اثنان فقط وهما عند A' ، A لاحظ أن الموضع B ليس قبا إذ أن oB (نصف قطر المتجه) ليس عموديا على السرعة ليس عموديا على السرعة .

٨/٥- نتائج :

أ. البعد القبوي يقسم المسار المركزي إلى قسمين متماثلين تماما،

ب. لا يوجد لأي مسار مركزي أكثر من بعدين قبوين أثنين يتكرران على التتابع إلا في حالة الدائرة فإنه يوجد بها بعد قبوي واحد يتكرر،

ج. في بعض المسائل ترتبط السرعة الابتدائية بالسرعة في دائرة تحت تأثير نفس القوة أي أن إذا قذفت النقطة المادية من موضع على بعد a من مركز الجذب بسرعة تساوي السرعة في دائرة نصف قطرها a تحت تأثير نفس القوة فيكون معادلة الحركة في دائرة

$$m\frac{v^2}{a}=mF(a)$$

و منها نجد أن السرعة الابتدائية v_o تكون

$$v_o^2=a\,F(a)$$

د. السرعة من ما لانهاية في بعض المسائل تربط السرعة الابتدائية بالسرعة التي تكتسبها النقطة المادية إذا بدأت حركتها في خط مستقيم مبتدئة من السكون وسقطت من ما لانهاية حتى تصل إلى الموضع الذي قذفت منه و ليكن تحت تأثير نفس القوة فيكون

$$m\ddot{r}=-mF(r) \qquad (1)$$

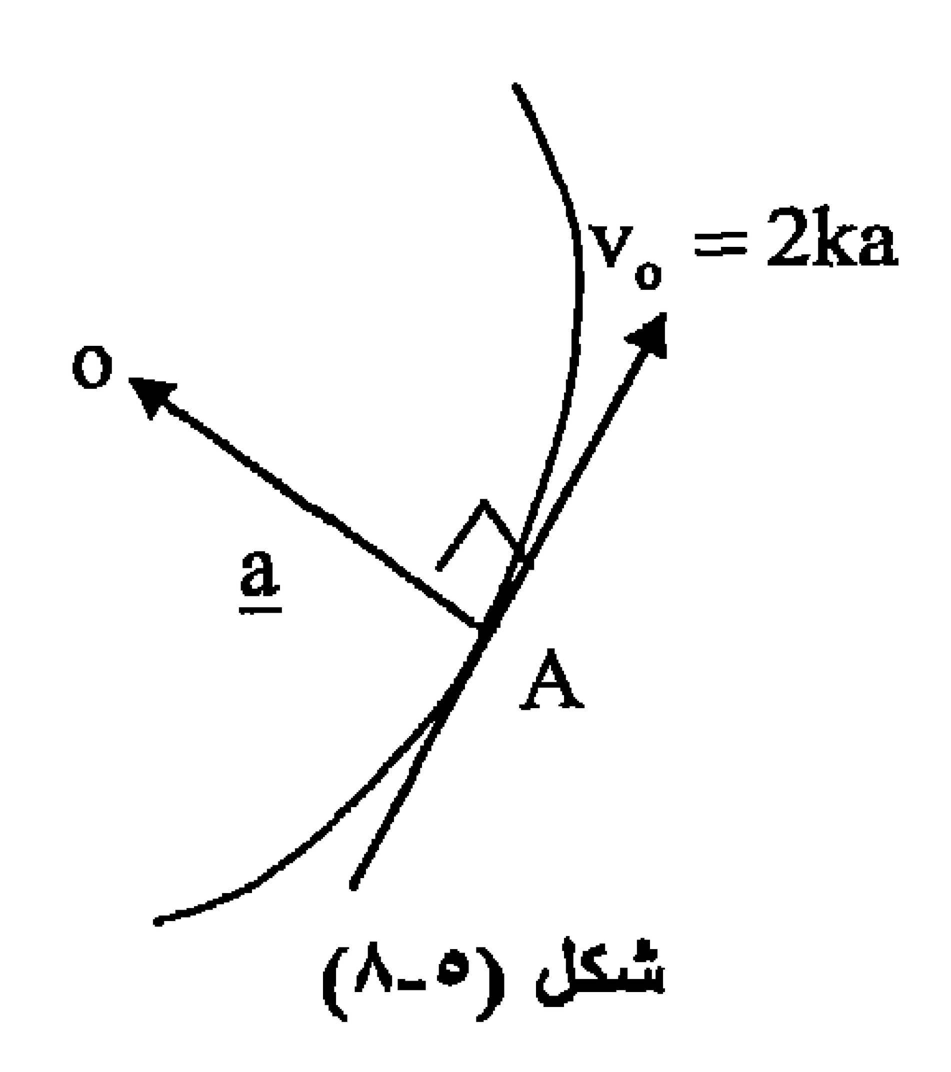
و بوضع $\ddot{r}=\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$ في (1) و فصل المتغيرات و التكامل نحصل

$$v_\infty^2=-2\int_\infty^o F(r)dr$$

٥/٩- أمثلة :

مثــال (١): يتحــرك جسـيم كتلتــه m تحــت تــأثير قــوة مركزيــة جاذبــة مقــدارها $mk^2\left(r+\frac{a^2}{r^2}\right)$ نحو القطب o .أذا قذف الجسيم بسرعة $2ka$ من أبس (قبا) A على بعد a من القطب o. أوجد المعادلة القطبية للمسار. بفرض أن θ مقاسه من الخط oA.

الحل :



شكل (٥-٨)

قانون القوة للمسار المركزي هو (لوحدة الكتل)
المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي:

$$F(u)=h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] \qquad (1)$$

و بالتعويض عن القوة المعطاة نحصل على

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=k^2\left(u^{-1}+a^4u^3\right) \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $2\frac{du}{d\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=k^2\left(-u^{-2}+a^4u^2\right)+C_1 \qquad (3)$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$ ،

$v = 2ka$ و بالتعويض في (3)

$$4k^2a^2 = \mu\left(-a^2 + a^2\right) + C_1$$ ، ومنها نحصل على

$$C_1 = 4k^2a^2 \qquad (4)$$

أيضا لتعيين الثابت h (القذف من قبا) من الشكل (٥-٨) فإن

$$h = v_0 . r_0 = 2k.a^2 \qquad (5)$$

بالتعويض عن C_1 و h من (4) ، (5) في (3) نجد أن

$$4k^2a^4\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = k^2\left(-u^{-2} + a^4u^2\right) + 4k^2a^2 \qquad (6)$$

و من (6) نستنتج

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{4a^4}\left(-u^{-2} + a^4u^2\right) + \frac{1}{a^2} - u^2 \qquad (7)$$

و يمكن وضع المعادلة (7) على الصورة

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\frac{1}{4a^4u^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{3}{4}u^2 = \frac{4a^2u^2 - 3a^4u^2 - 1}{4a^4u^2}$$

$$= \frac{3}{4a^4u^2}\left[-\left(a^2u^2\right)^2 - \frac{4}{3}a^2u^2 + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{4a^4u^2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(a^2u^2 - \frac{2}{3}\right)^2\right]$$

أي أن

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2a^2u}\sqrt{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(a^2u^2 - \frac{2}{3}\right)^2\right)^2} \qquad (8)$$

ولاختيار الإشارة حيث r تتزايد مع θ فإن u تتناقص مع تزايد θ فإننا نختار الإشارة السالبة

و بفصل المتغيرات في (8) والتكامل نحصل على

$$\int \frac{2a^2 u du}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(a^2u^2 - \frac{2}{3}\right)^2}} = \sqrt{3}\int d\theta$$

$$\int \frac{d(a u - 2/3) du}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(a^2u^2 - \frac{2}{3}\right)^2}} = \sqrt{3}\int d\theta$$

تكون نتيجة التكامل هي

$$\sin^{-1}\left(\frac{a^2 u^2 - 2/3}{1/3}\right) = \theta\sqrt{3} + C_2 \qquad (9)$$

حيث C_2 ثابت التكامل، يتعين من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$،

و بالتعويض في (9) نجد أن قيمة $C_2 = \pi/2$ ، و بالتعويض عن الثابت C_2 في (9) نحصل على

$$\sin^{-1}\left(\frac{a^2 u^2 - 2/3}{1/3}\right) = \theta\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} \qquad (10)$$

و بحل المعادلة (8) في u نحصل على

$$3a^2u^2 - 2 = \sin\left(\theta\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\theta\sqrt{3}\right) \qquad (11)$$

و بوضع $u = \frac{1}{r}$ في (10) نحصل على

$$3a^2 = r^2\left[\cos\left(\theta\sqrt{3}\right) + 2\right] \qquad (12)$$

و المعادلة (12) تمثل المعادلة القطبية للمسار.

مثال(٢): تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة جاذبة مقدارها لوحدة الكتل $\mu\left(u^2 - a u^3\right)$ فإذا قذفت النقطة من قبا "أبس" على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\sqrt{\frac{\mu}{2a}}$. أثبت أن البعد ألقبوي الآخر هو $3a$ وأن معادلة المسار هي $r\left(\cos\sqrt{3}\theta + 2\right) = 3a$.

الحل :

قانون القوة للمسار المركزي هو (لوحدة الكتل)

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي:

$$F(u)=h^2 u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] \qquad (1)$$

و بالتعويض عن القوة المعطاة نحصل على

$$h^2 u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=\mu\left(u^2-au^3\right) \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $2\frac{du}{d\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=2\mu\left(u+\frac{a}{2}u^2\right)+C_1 \qquad (3)$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t=0$ كانت $u=\frac{1}{a}$ ،

$v=\sqrt{\frac{\mu}{2a}}$ و بالتعويض في (3) ،

$\frac{\mu}{2a}=2\mu\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{2a^2}\right)+C_1$ ، ومنها نحصل على

$$C_1=-\frac{\mu}{2a} \qquad (4)$$

أيضا لتعيين الثابت h (القذف من قبا)

$$h^2=v_o^2.r_o^2=\frac{\mu}{2a}.a^2=\frac{1}{2}\mu a \qquad (5)$$

بالتعويض عن C_1 و h من (4) ، (5) في (3) نجد أن

$$\frac{\mu a}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=2\mu\left(u+\frac{a}{2}u^2\right)-\frac{\mu}{2a} \qquad (6)$$

لإيجاد الأبعاد القبوية نضع $\frac{du}{d\theta}=0$ في (6) نحصل على

$$3a^2u^2 - 4au + 1 = (3au - 1)(3au - 1) = 0 \tag{7}$$

و من (7) نستنتج أن

$$u = \frac{1}{a}\,(r_1 = a)\ \text{or}\quad u = \frac{1}{3a}\,(r_2 = 3a) \tag{8}$$

من (8) نستنتج أن البعد القبوي الأخر هو $r = 3a$.

وللإيجاد معادلة المسار نحل (6)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{4}{a}\left(u - \frac{a}{2}u^2\right) - u^2 - \frac{1}{a^2} \tag{9}$$

و يمكن وضع المعادلة (9) على الصورة

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\frac{4}{a} - 3u^2 - \frac{1}{a^2}$$

$$= 3\left[\frac{4}{3a}u - u^2 + \frac{1}{3a^3}\right]$$

$$= 3\left[\left(\frac{1}{3a}\right)^2 - \left(u - \frac{2}{3a}\right)^2\right]$$

أي أن

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{3a}\right)^2 - \left(u - \frac{2}{3a}\right)^2} \tag{10}$$

ولاختبار الإشارة حيث r تتزايد مع θ فإن u تتناقص مع تزايد θ فإننا نختار الإشارة السالبة

و بفصل المتغيرات في (10) و التكامل نحصل على

$$\int \frac{-du}{\sqrt{\left(\frac{1}{3a}\right)^2 - \left(u - \frac{2}{3a}\right)^2}} = \sqrt{3}\int d\theta$$

تكون نتيجة التكامل هي

$$\cos^{-1}(3au - 2) = \theta\sqrt{3} + C_2 \tag{11}$$

حيث C_2 ثابت التكامل، يتعين من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$ ،
وبالتعويض في (11) نجد أن قيمة $C_2 = 0$ ، و بالتعويض عن الثابت C_2 في (8)
نحصل على

$$\cos^{-1}(3au - 2) = \sqrt{3}\,\theta \qquad (12)$$

و بحل المعادلة (12) في u نحصل على

$$3au - 2 = \cos\sqrt{3}\,\theta \qquad (13)$$

و بوضع $u = \frac{1}{r}$ في (13) نحصل على

$$3a = r\left[\cos\left(\sqrt{3}\,\theta\right) + 2\right] \qquad (14)$$

و المعادلة (14) تمثل المعادلة القطبية للمسار.

مثال (٣): تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها $\mu\left(2u^2 - \frac{3}{4}au^3\right)$ لوحدة الكتل فإذا قذفت من موضع على بعد a بسرعة $\sqrt{2}$ السرعة في دائرة تحت تأثير نفس القوة في اتجاه يصنع زاوية $\cot^{-1}2$. أثبت أن البعدين القبويين للمسار هما $a/3$, $5a$ ثم أوجد معادلة المسار.

الحل :

تحديد السرعة في دائرة :

$$v^2 = aF(a) = \mu\left(2a^{-2} - \frac{3}{4}a\,a^{-3}\right) = \frac{5}{4a^2} \qquad (1)$$

حيث أن النقطة المادية قذفت من موضع على بعد بسرعة
$\sqrt{2}$ السرعة في دائرة فإن من (1) نستنتج

$$v_o^2 = 2v^2 = \frac{5\mu}{2a^2} \qquad (2)$$

أيضا لتعيين الثابت h

$$h^2 = v_o^2 \sin^2\alpha . r_o^2 = \frac{5\mu}{2a}.\frac{1}{5}.a^2 = \frac{1}{2}\mu a \qquad (3)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي:

$$F(u) = h^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] \qquad (4)$$

و بالتعويض عن القوة المعطاة نحصل على

$$h^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] = \mu \left(2u^2 - \frac{3}{4} a u^3 \right) \qquad (5)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $2\frac{du}{d\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = \mu \left(4u - \frac{3}{4} u^2 \right) + C_1 \qquad (6)$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$ ،

$v = \sqrt{\frac{5\mu}{4a^2}}$ و بالتعويض في (6) ،

$\frac{5\mu}{4a^2} = \mu \left(\frac{4}{a} + \frac{3}{4a^2} \right) + C_1$ ، ومنها نحصل على

$$C_1 = -\frac{3\mu}{4a} \qquad (7)$$

بالتعويض عن C_1 و h من (3) ، (7) في (6) نجد أن

$$\frac{\mu a}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = \mu \left(4u - \frac{3}{4} a u^2 \right) - \frac{3\mu}{4a} \qquad (8)$$

لإيجاد الأبعاد القبوية نضع $\frac{du}{d\theta} = 0$ في (8) نحصل على

$$5a^2u^2 - 16au + 3 = (5au - 1)(au - 3) = 0 \qquad (9)$$

و من (9) نستنتج أن

$$u = \frac{1}{5a} \ (r_1 = 5a) \ \text{or} \ \ u = \frac{3}{a} \ (r_2 = \frac{a}{3}) \qquad (10)$$

نستنتج من (10) أن الأبعاد القبوية هي $\frac{a}{3}$ ، $5a$.

ولإيجاد معادلة المسار نحل (8)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\frac{5}{2}u^2 + \frac{8}{a}u - \frac{3}{2a^2} \qquad (11)$$

و يمكن وضع المعادلة (11) على الصورة

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{16}{5a}u - u^2 - \frac{3}{5a^2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{49}{25a} - \left(u - \frac{8}{5a}\right)^2\right)$$

أي أن

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\left(\frac{7}{5a}\right)^2 - \left(u - \frac{8}{5a}\right)^2} \qquad (12)$$

ولاختبار الإشارة حيث r تتزايد مع θ فإن u تتناقص مع تزايد θ فإننا نختار الإشارة السالبة، و بفصل المتغيرات في (12) و التكامل نحصل على

$$\int \frac{-du}{\sqrt{\left(\frac{7}{5a}\right)^2 - \left(u - \frac{8}{5a}\right)^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\int d\theta$$

تكون نتيجة التكامل هي

$$\cos^{-1}\left(\frac{u - 8/5a}{7/5a}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\theta + C_2 \qquad (13)$$

حيث C_2 ثابت التكامل، يتعين من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$، و $\theta = \cot^{-1}2$ بالتعويض في (13) نجد أن قيمة $C_2 = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = \beta$ ،

و بالتعويض عن الثابت C_2 في (13) نحصل على

$$\cos^{-1}\left(\frac{u - 8/5a}{7/5a}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\theta + \beta \qquad (14)$$

و بحل المعادلة (14) في u نحصل على

$$u-\frac{8}{5a}=\frac{7}{5a}\cos\left(\frac{5}{2}\theta+\beta\right) \qquad (15)$$

و بوضع $u=\frac{1}{r}$ في (13) نحصل على

$$5a=r\left[7\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\theta+\beta\right)+8\right] \qquad (16)$$

و المعادلة (16) تمثل المعادلة القطبية للمسار.

مثال (٤): تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها لوحدة الكتل $\mu\left(5u^3+8a^2u^5\right)$ فإذا قذفت النقطة المادية من قبا على بعد a بالسرعة التي تكتسبها لو سقطت من مالانهايه إلى الموضع a .أثبت أن معادلة المسار هي $r=\cos\frac{2}{3}\theta$ ثم أوجد الزمن اللازم لكي يقطع نصف المتجه زاوية $\frac{3\pi}{4}$.

الحل :

أولا : أيجاد السرعة الابتدائية :

$$v_\infty^2=-2\int_\infty^a F(r)\,dr=-2\mu\int_\infty^a\left(\frac{5}{r^3}+\frac{8a^2}{r^5}\right)dr$$

$$=\mu\left[\frac{5}{r^2}+\frac{4a^2}{r^4}\right]_a^\infty=\frac{9\mu}{a^2} \qquad (1)$$

ومن (1) نجد أن السرعة الابتدائية التي قذفت بها النقطة هي

$$v_o=\sqrt{\frac{9\mu}{a^2}} \qquad (2)$$

ثانيا : إيجاد الثابت h (عزم السرعة) :

$$h=v_o.a=\sqrt{\frac{9\mu}{a^2}}.a=\sqrt{9\mu} \qquad (3)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي:

$$F(u) = h^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] \qquad (4)$$

و بالتعويض عن القوة المعطاة نحصل على

$$h^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] = \mu u^2 \left(5u + 8a^2 u^3 \right) \qquad (5)$$

بضرب طرفي المعادلة (5) في $2\frac{du}{d\theta}$ والتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن

$$h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = \mu \left(5u^2 + 4a^2 u^4 \right) + C_1 \qquad (6)$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}$ ، $v = v_o = \sqrt{\frac{9\mu}{a^2}}$ و بالتعويض في (6) ،

$\frac{9\mu}{a^2} = \mu \left(\frac{4}{a^2} + \frac{5a^2}{a^4} \right) + C_1$ ، ومنها نحصل على

$$C_1 = 0 \qquad (7)$$

بالتعويض عن C_1 و h من (3) ، (7) في (6) نجد أن

$$9\mu \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = \mu \left(5u^2 + 4a^2 u^4 \right) \qquad (8)$$

و يمكن وضع المعادلة (8) على الصورة

$$9 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = 5u^2 + 4a^2 u^4 - 9u^2 = 4u^2 \left(a^2 u^4 - 1 \right) \qquad (9)$$

و من المعادلة (9) نستنتج

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \frac{2}{3} a u \sqrt{u^2 - 1/a^2} \qquad (10)$$

ولاختبار الإشارة حيث r تتزايد مع θ فإن u تتناقص مع تزايد θ فإننا نختار الإشارة السالبة، و بفصل المتغيرات في (10) و التكامل نحصل على

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1/a^2}}=\frac{2}{3}\int d\theta$$

تكون نتيجة التكامل هي

$$a\sec^{-1}au=\frac{2}{3}\theta+C_2 \qquad (11)$$

حيث C_2 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية، عند $t=0$ كانت $u=\frac{1}{a}$ ، $\theta=0$ و بالتعويض في (11) ، نجد أن قيمة الثابت $C_2=0$ ، و بالتعويض عن قيمة الثابت في (11) نحصل على

$$a\sec^{-1}au=\frac{2}{3}\theta \qquad (12)$$

و بحل المعادلة (14) في u نحصل على

$$au=\sec\left(\frac{2}{3}\theta\right) \qquad (13)$$

و بوضع $u=\frac{1}{r}$ في (13) نحصل على

$$r=a\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) \qquad (14)$$

و المعادلة (14) تمثل المعادلة القطبية للمسار.

ولايجا الزمن اللازم لكي يقطع نصف قطر المتجه زاوية $\frac{3\pi}{4}$ نستخدم معادلة عزم السرعة وهي $h=r\dot{\theta}^2$ ، و باستخدام (14) و و فصل المتغيرات و التكامل نجد أن

$$t=\frac{1}{h}\int_0^{\alpha}[f(\theta)]^2\,d\theta=\frac{1}{3\sqrt{\mu}}\int_0^{3\pi/4}\left[a\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)\right]^2 d\theta$$

$$=\frac{a^2}{6\sqrt{\mu}}\int_0^{3\pi/4}\left[1+\cos\left(\frac{4}{3}\theta\right)\right]d\theta \qquad (15)$$

$$=\frac{\pi a^2}{8\sqrt{\mu}}$$

١٠/٥ – قوانين كيبلر لحركة الكواكب :

من أهم التطبيقات على الحركة في الإحداثيات القطبية هي دراسة حركة الكواكب ولقد وضع كيبلر ثلاث قوانين هامة ومشهورة باسمه وذلك من خلال متابعته لحركة الكواكب السيارة والقوانين هي :

القانون الأول: تتحرك الكواكب في مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها حيث المعادلة القطبية هي

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta}$$

حيث e الاختلاف المركزي، L هي نصف طول الوتر.

البؤري العمودي.

القانون الثاني: المستقيم الواصل بين الشمس والكواكب يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية وهذا تم أثباته وهى السرعة المساحية ثابتة.

$$r\dot{\theta}^2 = h$$

القانون الثالث: يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكواكب مع مربع زمنه الدوري، وهذه ثابتة لجميع الكواكب

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$$

حيث a هي نصف طول المحور الأكبر للقطع الناقص، T هو الزمن الدوري الذي يتم فيه الكوكب دورة كاملة.

ومن التطبيقات التي استخدمت فيها قوانين كيبلر هو استنتاج قانون الجذب العام والذي تم استنتاجه بواسطة نيوتن، وينص قانون الجذب العام على " كل جسمين في الكون يتجاذبان بقوة تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيا مع مربع المسافة بينهما".

٥/١١- أمثلة :

مثال (١٠): إذا كانت كتلة القمر $\frac{1}{81}$ من كتلة الأرض وأن الزمن الدوري للأرض حول الشمس هو $365\frac{1}{4}$ يوم وبعدها عن الشمس (93×10^{6}) ميل والزمن الدوري للقمر حول الأرض $275\frac{1}{3}$ يوم ومتوسط بعده عن الأرض هو (33×10^{4}) ميل، فأثبت أن كتلة الشمس تساوى(33×10^{4}) مرة قدر كتلة الأرض.

الحل :

الزمن الدوري يعطى بالعلاقة

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^2 \qquad (1)$$

نفرض أن M هي كتلة الشمس، m كتلة الأرض فإن قوة جذب الشمس للأرض هي

$$F_1 = \frac{\gamma m M}{r^2} \qquad (2)$$

و في اتجاه الشمس ، أيضا جذب الأرض للشمس هو

$$F_2 = \frac{\gamma m M}{r^2} \qquad (3)$$

وفى اتجاه الأرض ، و عجلة حركة الشمس هي

$$f_1 = \frac{\gamma m}{r^2} \qquad (4)$$

عجلة حركة الأرض هي

$$f_2 = \frac{\gamma M}{r^2} \qquad (5)$$

العجلة النسبية للأرض بالنسبة للشمس هي

$$f = f_2 - f_1 = \frac{\gamma M}{r^2} - \left(-\frac{\gamma m}{r^2}\right) = \frac{\gamma (m + M)}{r^2} \qquad (6)$$

و يمكن كتابة (6) على النحو التالي

$$f = \frac{\mu}{r^2} \qquad (7)$$

حيث

$$\mu = \gamma(m+M) \qquad (8)$$

من المعادلة (1)

$$(364.25)^2 = \frac{4\pi^2\left(93\times10^6\right)^3}{\gamma(m+M)} \qquad (9)$$

معادلة المسار هي

$$r = \frac{L}{1+e\cos\theta} \qquad (10)$$

حيث $u=\frac{1}{r}$ فأن

$$u = \frac{1}{L}+\frac{e\cos\theta}{L} \qquad (11)$$

و نستنتج من (11) أن

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{L}, \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e\sin\theta}{L} \qquad (12)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية للمسار المركزي

$$F(u) = h^2 u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] \qquad (13)$$

و بالتعويض من (12) في (13) نجد أن

$$F(u) = mh^2 u^2\left[-\frac{e\cos\theta}{L}+\frac{1}{L}+\frac{e\cos\theta}{L}\right] = \frac{h^2}{L}mu^2 \qquad (14)$$

و بوضع $\mu=\frac{h^2}{L}$، فإن (14) تكتب على الصورة

$$F(u) = \mu m u^2 \qquad (15)$$

وباعتبار $\mu=\gamma M$ حيث M هي كتلة الشمس، γ يسمى بثابت الجذب العام ، و بوضع $u=\frac{1}{r}$، و من (15) نحصل على

$$F = \frac{\gamma m M}{r^2} \qquad (16)$$

وحيث أن الزمن الدوري للقمر حول الأرض $27\frac{1}{3}$ يوم ، و بالتعويض في (1) و استخدام $\mu=\gamma M$، نجد أن

$$\left(27\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4\pi^2\left(24\times10^4\right)^3}{\gamma\left(\frac{1}{8}m+m\right)} \qquad (17)$$

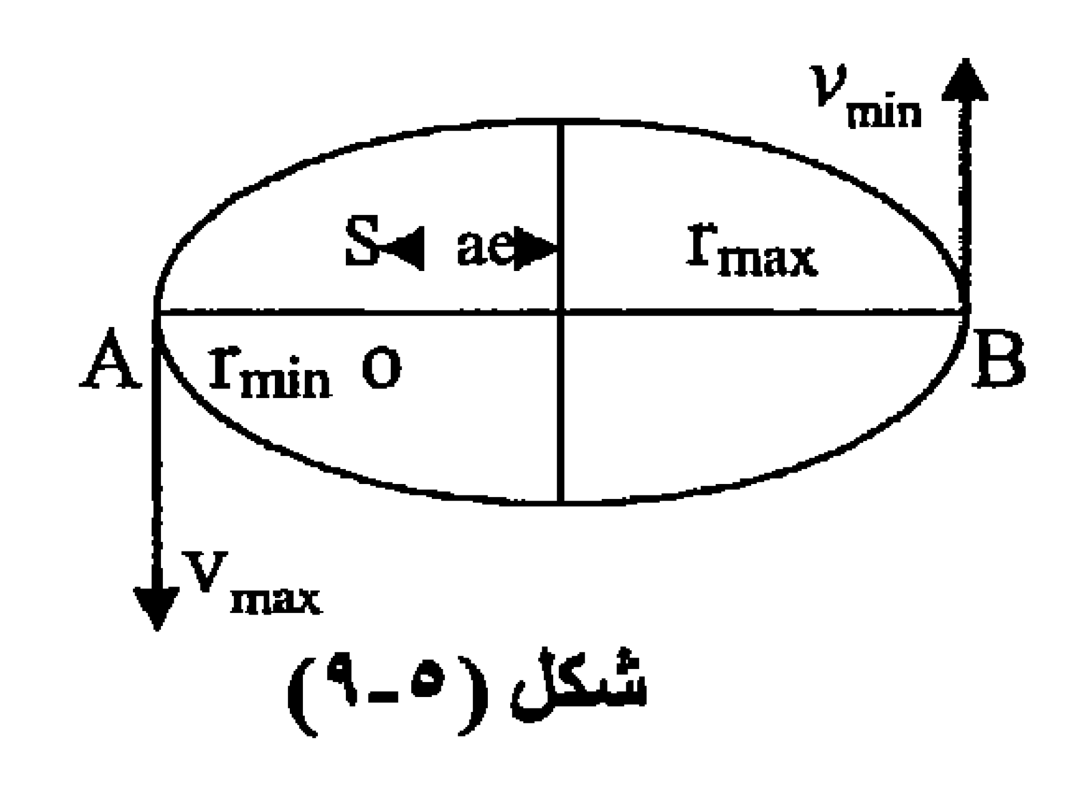
بقسمة (9) على (17) نحصل على

$$M = 3.3\times10^3 m \qquad (18)$$

نستنتج من (18) أن كتلة الشمس تساوي $\left(3.3\times10^4\right)$ مرة قدر كتلة الأرض.

مثال (١١): إذا كان أكبر وأصغر سرعة لكوكب يدور حول الشمس هما 110 mile , 90 mile والزمن الدوري يساوي. 20 min. اوجد الاختلاف المركزي لمسار القطع وطول المحور الأكبر.

الحل :



شكل (٥-٩)

حيث عزم السرعة تساوي مقدار ثابت فإن

$$v_{max} . oA = v_{min} . oB \qquad (1)$$

ومنها نجد أن

$$110.(a - a e) = 90(a + a e)$$

أي أن

$$110a\ (1-e)=90\ a(1+a)$$

بحل هذه المعادلة نجد أن

$$e = \frac{1}{10} \qquad (2)$$

الزمن الدوري يعطى بالعلاقة

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3 \qquad (3)$$

فإن

$$(20\times 60)^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \qquad (4)$$

وحيث أن الكوكب يتحرك في مدار قطع ناقص في بؤرته الشمس فإن سرعة الكوكب v هي

$$v^2 = \mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right] \qquad (5)$$

و بالتعويض عن السرعة v و r في (5) نحصل على

$$(110)^2 = \mu\left[\frac{1}{a(1-a)} - \frac{2}{2a}\right] \qquad (6)$$

من (4) نستنتج أن

$$\frac{\mu}{a} = 99\times 10^2 \qquad (7)$$

و بالتعويض من (7) في (4) نحصل على

$$(20\times 60)^2 = \frac{4\pi^2}{99\times 10^2} a^2 \qquad (8)$$

و من (7) نجد أن

$$a = 7.2\,\text{mile}$$

١٢/٥- تمارين :

١. أوجد قانون القوة المركزية التي أذا أثرت على جسم كتلة m جعلته يتحرك في المسار $a = r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$ و اوجد كذلك مقدار السرعة عند أي لحظة.

٢. تتحرك نقطة مادية في مسار مركزي تحت تأثير قوة مركزية مقدارها $\mu m\left(\frac{r+2a}{r^5}\right)$ إلى المركز. قذفت هذه النقطة من نقطة تبعد مسافة a بالسرعة $v_0 = \sqrt{\frac{5\mu}{3a^3}}$ في اتجاه يصنع زاوية $\cot^{-1}2$ مع الخط الابتدائي. اثبت أن معادلة المسار هي $r = a(1+2\sin\theta)$.

٣. يتحرك جسم على مسار مركزي تحت تأثير قوة مركزية جاذبية مقدارها $\frac{\mu}{r^5}$ لوحدة الكتل حيث μ مقدار ثابت. قذف الجسم من أبس على بعد a من مركز القوة بسرعة v_0. اوجد معادلة المسار المركزي في كلا الحالتين:

i) $v_0 = \frac{1}{a^2}\sqrt{\mu}$ ii) $v_0 = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}$

٤. يتحرك جسم على مسار مركزي تحت تأثير قوة جاذبة $F = 2\mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{a^2}{r^5}\right)$ لوحدة

إذا قذف الجسم في البداية بسرعة $\frac{1}{a}\sqrt{\mu}$ من أبس على بعد a من مركز الجذب، فأثبت أنه سوف يكون على بعد r بعد مضي زمن $\frac{r}{2\mu}\left\{r\sqrt{r^2 - a^2} + a^2\cosh^{-1}\frac{r}{a}\right\}$.

٥. تتحرك نقطة مادية كتلتها m في مسار مركزي تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها $\frac{m\mu}{r^3}$ اوجد معادلة المسار والمسافات القبوية علماً بان النقطة المادية قذفت من قبا على بعد a من مركز الجذب بسرعة مقدارها $\frac{1}{a}\sqrt{2\mu}$ حيث μ مقدار ثابت.

٦. أوجد قانون القوة المركزية الجاذبة التي إذا أثرت على جسيم يتحرك في المسار $r^n = a^n \cos n\theta$ حيث n, a ثابتان، أوجد قانون السرعة عند أي لحظة.

٧. تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة جاذبة مركزية مقدارها μu^5 لوحدة الكتل فإذا قذفت النقطة من موضع على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{2}}$ في اتجاه يميل بزاوية α على نصف قطر المتجه فأثبت أن المسار يمثل دائرة تمر بمركز الجذب وقطرها هو $a\cos\alpha$.

٨. تتحرك نقطة مادية كتلتها m في مسار مركزي تحت تأثير قوة جاذبة $m\mu\left(\frac{3a}{r^4} - \frac{2(a^2 - b^2)}{r^5}\right)$ حيث a أكبر من b فإذا علم أنها بدأت الحركة من قبا على بعد $a+b$ بسرعة $v_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{a+b}$، أثبت أن للمسار قبا أخر عند $\{(a-b), \pi\}$ وأن الزمن اللازم للوصول إلى القبويين يكافئ: $\frac{(2a^2 + b^2)\pi}{2\sqrt{\mu}}$.

٩. يتحرك جسيم في مسار مركزي تحت تأثير العجلة $\mu\left(\frac{1}{u^5}-\frac{9}{u^4}\right)$ فإذا علم أنة قذف من قبا يبعد عن مركز الجذب وهو على بعد a بالسرعة $\sqrt{\frac{2\mu}{3}}a^3$ ، أثبت أن المسار هو المنحنى $x^4+y^4=a^4$.

الفصل السادس

الحركة المستوية للجسم الجاسيء (المتماسك)

A plane Motion of a Rigid Body

٦/١- تعريف الجسم الجاسئ Definition of The Rigid Body :

الجسم الجاسئ يتكون من عدد لا نهائي من النقاط المادية المترابطة مع بعضها البعض بحيث أن المسافة بين أي نقطتين ماديتين منها تكون ثابتة ولا تتأثر بأي قوى خارجية تؤثر على الجسم.

٦/٢-الحركة المستوية للجسم الجاسئ Plane motion of a rigid body :

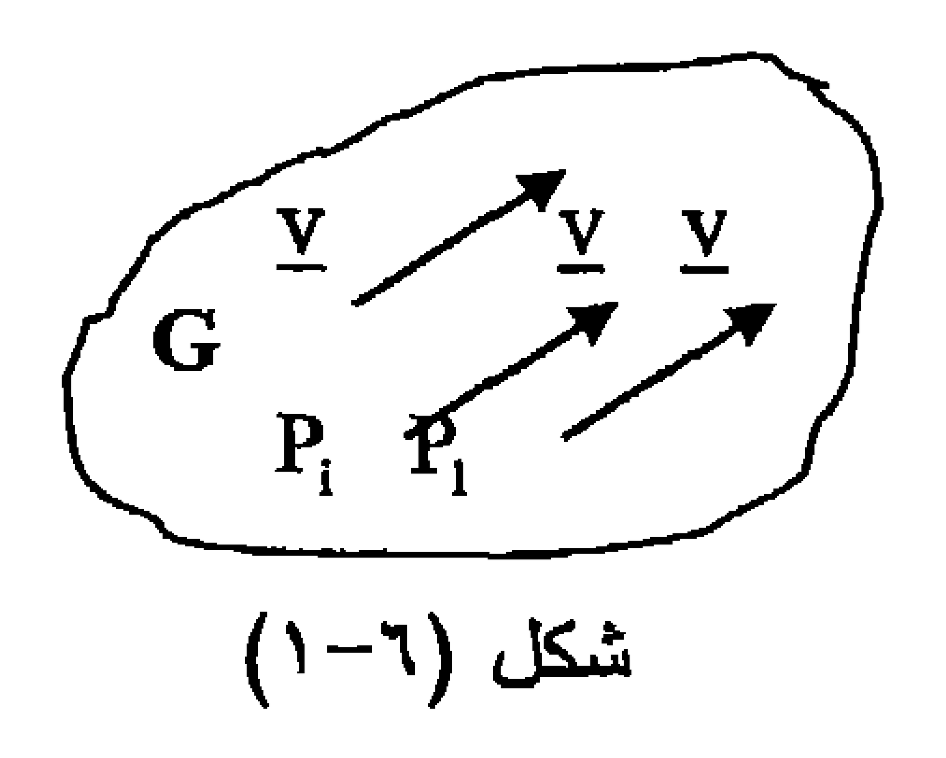
يقال أن الجسم الجاسئ يتحرك حركة مستوية إذا كانت جميع نقاطه تتحرك في مستويات متوازية ولها نفس السرعة وهي سرعة مركز ثقل الجسم.

٦/٢/١-أنواع الحركة المستوية Plane motion :

إذا أثرت قوة ما على جسم جاسئ فإن حركته تكون أي من الحركة

١. حركة انتقالية
٢. حركة دورا نية
٣. حركة عامة (انتقالية+دورا نية)

٦/٢/٢- الحركة الانتقالية : Translation motion



شكل (٦-١)

في الحركة الانتقالية للجسم الجاسئ تكون كتلة الجسم مركزه عند مركز الثقل G ، وأن G تتحرك بسرعة خطية $\vec{v}$ وأي نقطة P_i تتحرك أيضاً بنفس السرعة وفي نفس اتجاه $\vec{v}$، أنظر الشكل (٦-١)

٦/٢/٣-معادلات الحركة الانتقالية Equation of the translation motion :

إذا أثرت مجموعة من القوى الخارجية $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots \vec{F}_n$ على الجسم فإن معادلة الحركة الانتقالية تكون:

المجموع الجبري لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم في أي اتجاه يساوي معدل التغير في كمية حركة الجسم الخطية في نفس الاتجاه، أي أن

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (1)$$

حيث $\vec{P}_i$ كمية الحركة للنقطة المادية التي كتلتها m_i حيث

$$\vec{P}_i=m_i\vec{v}_i \qquad (2)$$

و بالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (3)$$

و من (3) نستنتج

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (4)$$

عندئذ تكون معادلة الحركة الانتقالية هي

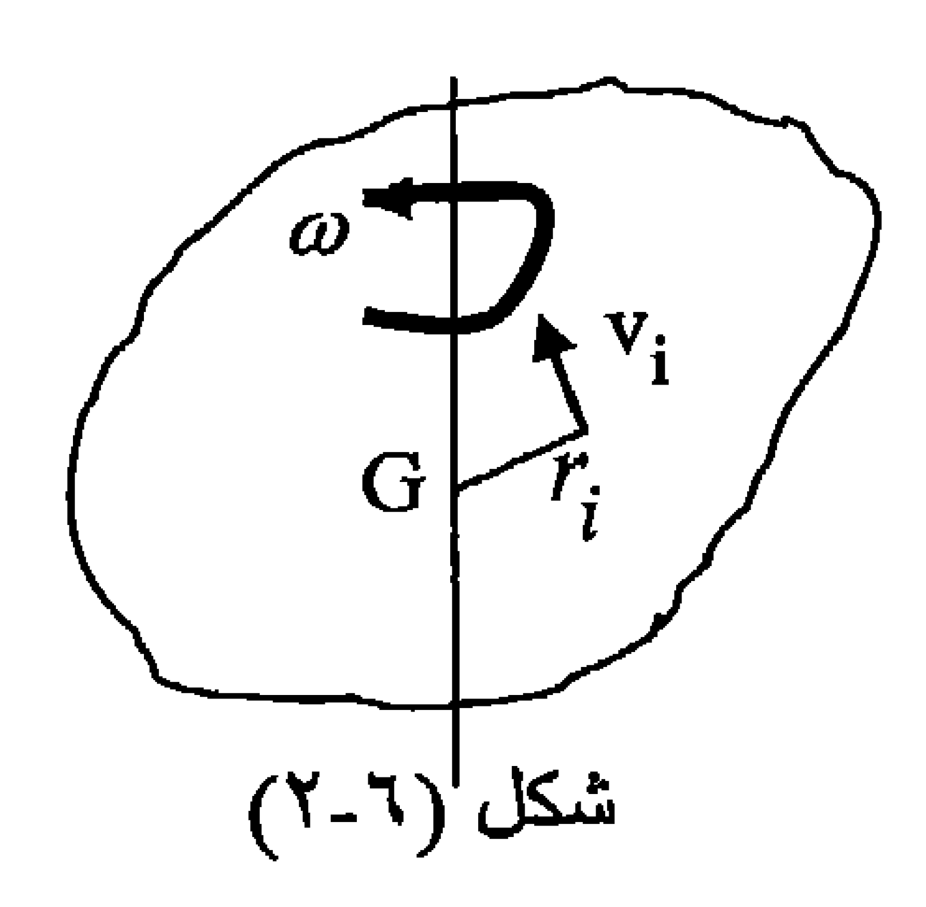
$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \qquad (5)$$

حيث $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ كتلة الجسم، $\vec{v}$ سرعته.

نستنتج أن معادلة الحركة الانتقالية للجسم الجاسئ تنص على :

كتله الجسم × العجلة الخطية في أي اتجاه= مجموع القوى المؤثرة في نفس الاتجاه.

٦/٢/٤- الحركة الدورانية Rotational Motion :



شكل (٦-٢)

في الحركة الدورانية للجسم الجاسئ وفيها تدور جميع نقاط الجسم حول محور عمودي على مستواه ويمر بمركز الثقل وترسم دوائر متحدة المركز وهو مركز ثقلها ولها نفس السرعة الزاوية ω وتكون سرعة أي نقطة مادية ولتكن P_i انظر الشكل (٦-٣) هي

$$\bar{v}_i = \omega\, r_i \tag{1}$$

حيث $\bar{v}_i$ سرعة النقطة P_i وتكون عمودية على r_i (نصف قطر الدائرة التي ترسمها النقطة المادية P_i).

٦/٢/٥- كمية الحركة الدورانية (الزاوية) :

Moment of momentum(Angular momentum)

من الشكل (٦-٢) عزم كمية الحركة للنقطة المادية P_i و يرمز لها رياضيا h_i حول G و باستخدام (1) هي

$$h_i = (m_i v_i)\, r_i = \omega\, r_i^2 \tag{2}$$

فإن عزم كمية الحركة للجسم هي

$$\vec{h}_G = \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{n=1}^{n} (m_i r_i^2)\,\vec{\omega} \tag{3}$$

و يمكن كتابة (3) على الصورة

$$\vec{h}_G = I_G\, \vec{\omega} \tag{4}$$

حيث

$$I_G = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{5}$$

وتعرف I_G بعزم القصور الذاتي للجسم حول محور عمودي على الجسم ويمر بمركز ثقله G. وتعرف h_G بكمية الحركة الزاوية.

٦/٢/٦- معادلة الحركة الدورانية Equation of the rotational motion :

معادلة الحركة الدورانية هي :

معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول النقطة G تساوي المجموع الجبري لعزم القوى الخارجية المؤثرة حول G، أي أن

$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \qquad (6)$$

و بالتعويض عن $\vec{h}_G$ من (5) في المعادلة (6) نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(I_G\, \vec{\omega}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \qquad (7)$$

من (7) نستنتج أن معادلة الحركة الدورانية للجسم الجاسئ حول مركز ثقل جسم تكون على الصورة

$$I_G\, \dot{\vec{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \qquad (8)$$

حيث $\dot{\vec{\omega}}$ هي العجلة الزاوية للجسم .

٦/٢/٧- طاقة الحركة الدورانية Rotational Kinetic Energy :

عندما يتحرك الجسم الجاسئ حركة دورا نية فإنه تنشأ طاقة حركة تسمي طاقة الحركة الدورانية و يرمز لها رياضياً بالرمز T_r و يمكن استنتاجها على النحو التالي

$$T_r = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \qquad (9)$$

بالتعويض في (9) عن السرعة v_i من (1) نجد أن

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 \qquad (10)$$

و باستخدام (5) في (10) فإن طاقة الحركة الدورانية تأخذ الصورة

$$T_r = \frac{1}{2}\omega^2 I_G \qquad (11)$$

و تكون طاقة الحركة الكلية إذا تحرك الجسم الجاسئ حركة عامة هي:

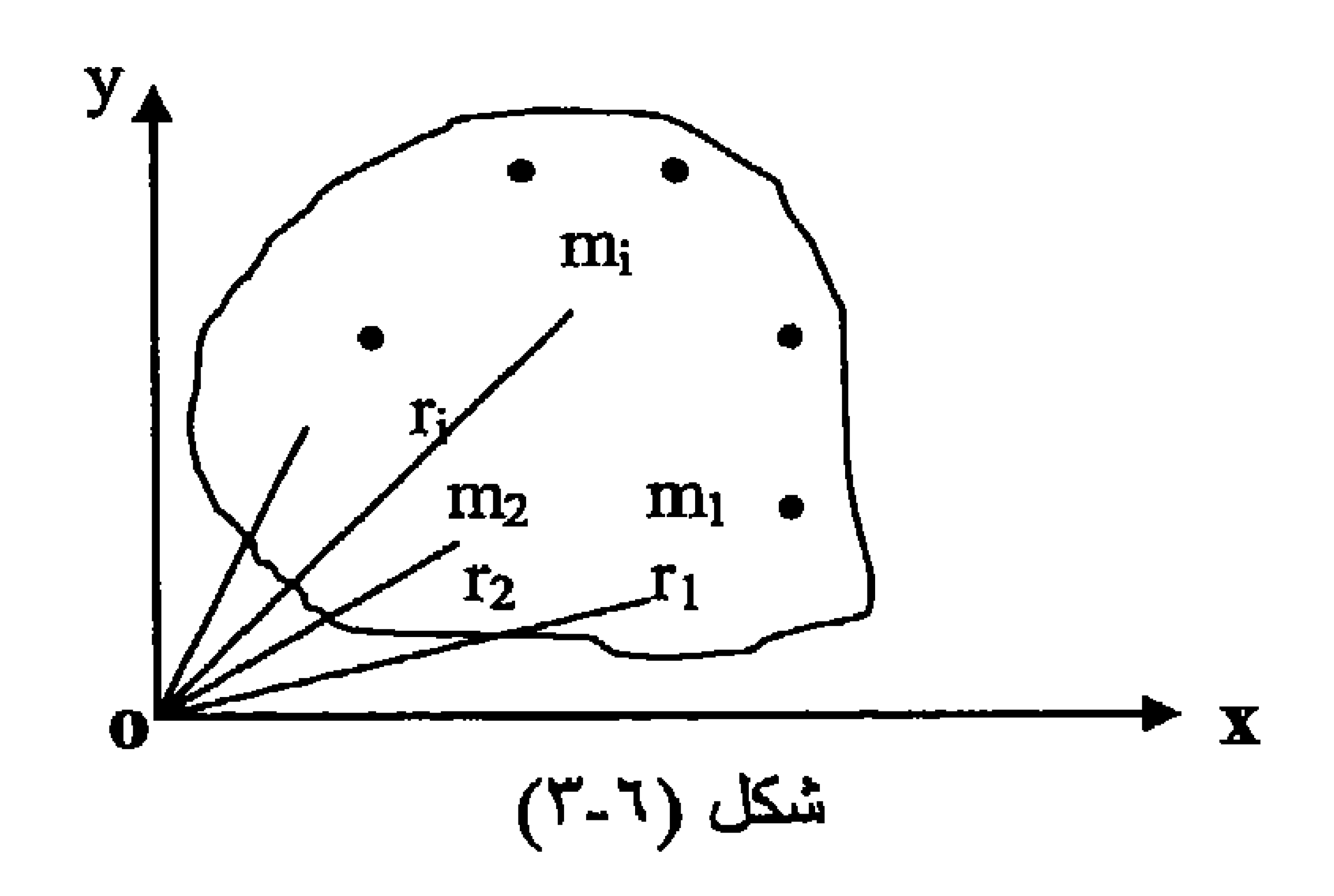
طاقة حركة دورانية + طاقة حركة انتقالية = دورانية+انتقالية = طاقة الحركة الكلية

$$T = T_t + T_r = \frac{1}{2}M v^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

نلاحظ بالمقارنة بين الحركة الانتقالية والحركة الدورانية على النحو التالي:

المتغير	الحركة الانتقالية	الحركة الدورانية
السرعة	سرعة خطية v	سرعة دورانية ω
الكتلة	الكتلة	عزم القصور الذاتي
طاقة الحركة	انتقالية $T_t = \frac{1}{2} M v^2$	دورانية $T_r = \frac{1}{2} I_G \omega^2$
كمية الحركة	خطية $P = Mv$	دورانية $h = I_G \omega$

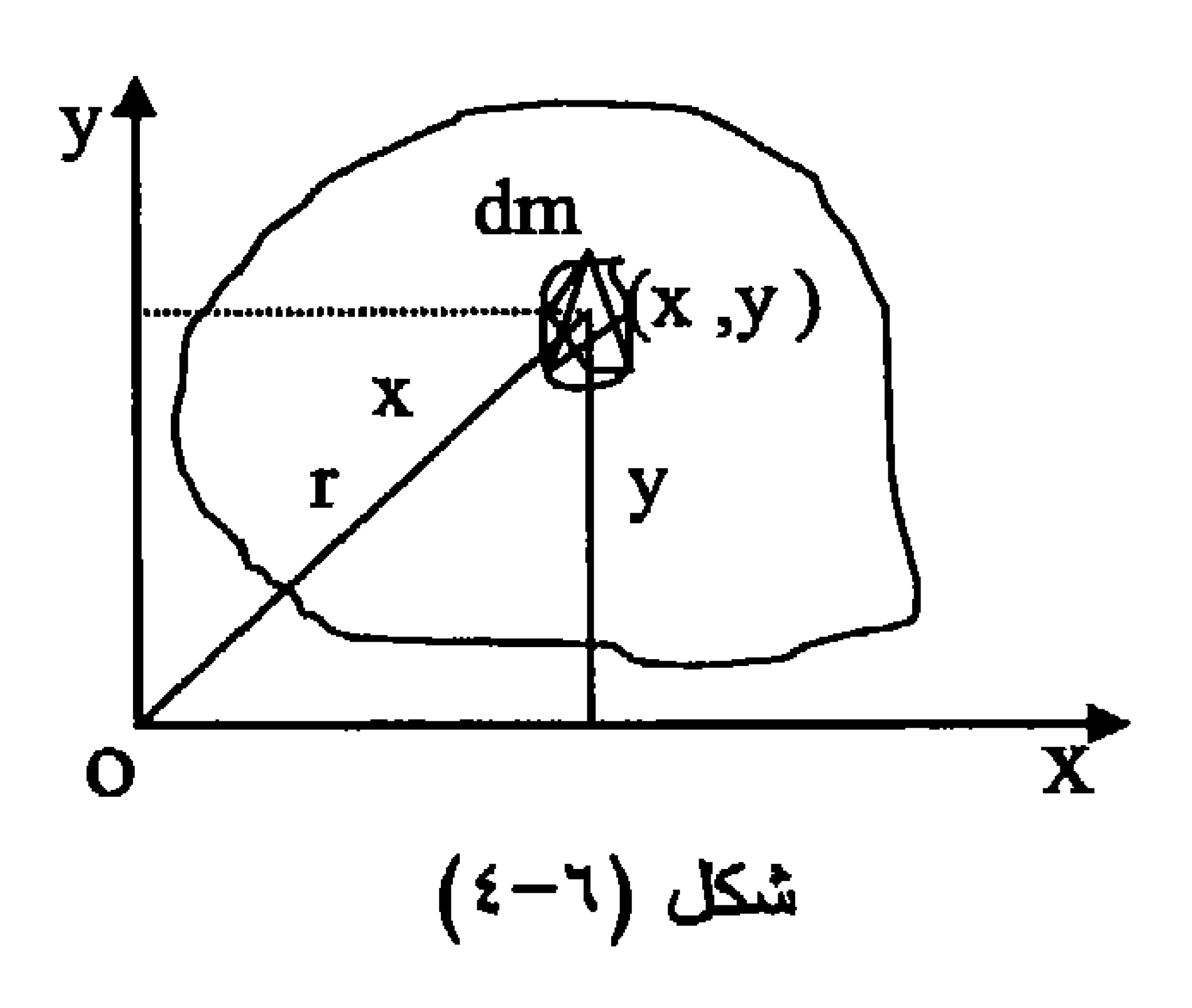
٦/٣- عزم القصور الذاتي Moment of Inertia :



شكل (٦-٣)

يعرف عزم القصور الذاتي لمجموعة من النقط المادية أنظر الشكل (٦-٣) حول النقطة o على النحو التالي:

$$I_o = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \cdots + m_n r_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 \qquad (1)$$



شكل (٦-٤)

حيث إنه عزم القصور الذاتي للنقطة المادية التي كتلتها m_i حول النقطة O يساوي حاصل ضرب الكتلة m_i في مربع بعدها عن النقطة O.

ولحساب عزم القصور الذاتي لأي جسم جاسئ نقسم هذا الجسم إلى عدد كبير جداً من العناصر كتلة كل عنصر منها dm أنظر الشكل (٦-٤) ويكون عزم القصور الذاتي للعنصر dI_o هو:

$$dI_o = r^2\, dm \qquad (1)$$

ويكون عزم القصور الذاتي للجسم كله هو:

$$I_o = \int r^2\, dm \qquad (2)$$

و من ثم نستنتج عزم القصور الذاتي للعنصر حول المحور ox هو

$$dI_{ox} = y^2\, dm \qquad (3)$$

حيث y بعد العنصر عن المحور ox ، إذن عزم القصور الذاتي للجسم كله:

$$I_{ox} = \int y^2\, dm \qquad (4)$$

أيضاً عزم القصور الذاتي للعنصر حول المحور oy يكون

$$dI_{ox} = x^2\, dm \qquad (5)$$

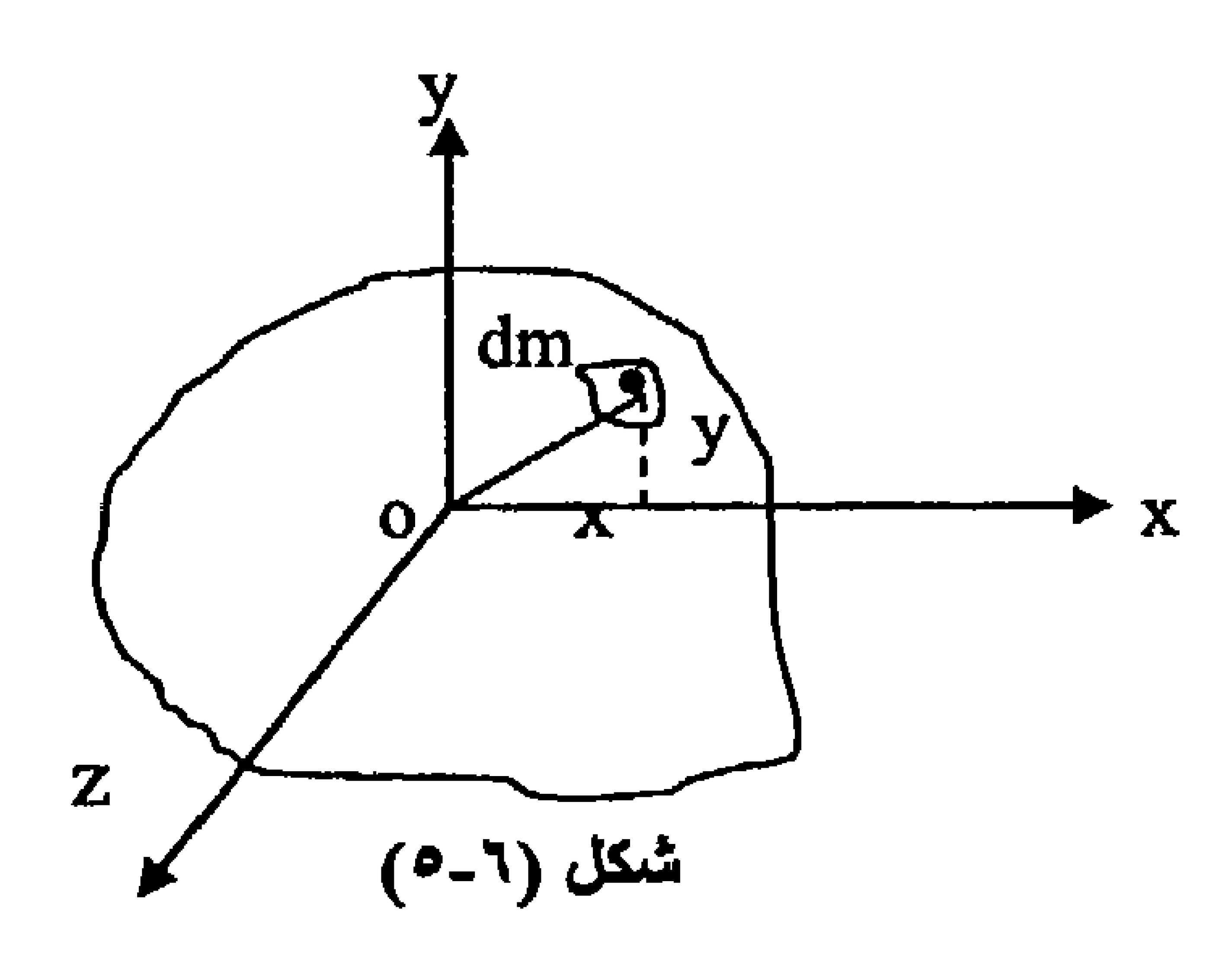
حيث x بعد العنصر عن المحور oy، إذن عزم القصور الذاتي للجسم كله حول المحور y هو

$$I_{ox} = \int x^2\, dm \qquad (6)$$

٤/٦- نظرية المحاور المتعامدة Theory of the perpendicular axes:

تنص على أن: عزم القصور الذاتي لصفيحة مستوية حول محور عمودي على مستويها يكافئ مجموع عزمي القصور الذاتي لنفس الصفيحة حول محورين متعامدين في مستوى الصفيحة ويتقاطعان مع المحور الأول.

البرهان :



شكل (٦-٥)

باعتبار ox ، oy محوران متعامدان في مستوى الصفيحة، oz محور عمودي على مستوى الصفيحة ماراً بالنقطة o ، نقسم الصفيحة إلى عناصر ولتكن كتلة إحداها dm ولنفرض أنه يتركز في النقطة (x , y) فإن

$$I_{ox} = \int y^2\, dm \qquad (1)$$

$$I_{oy} = \int x^2\, dm \qquad (2)$$

أيضا عزم القصور الذاتي حول المحور

$$I_{oz} = \int r^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm \qquad (3)$$

بالتعويض من (1)، (2) في (3) نحصل على

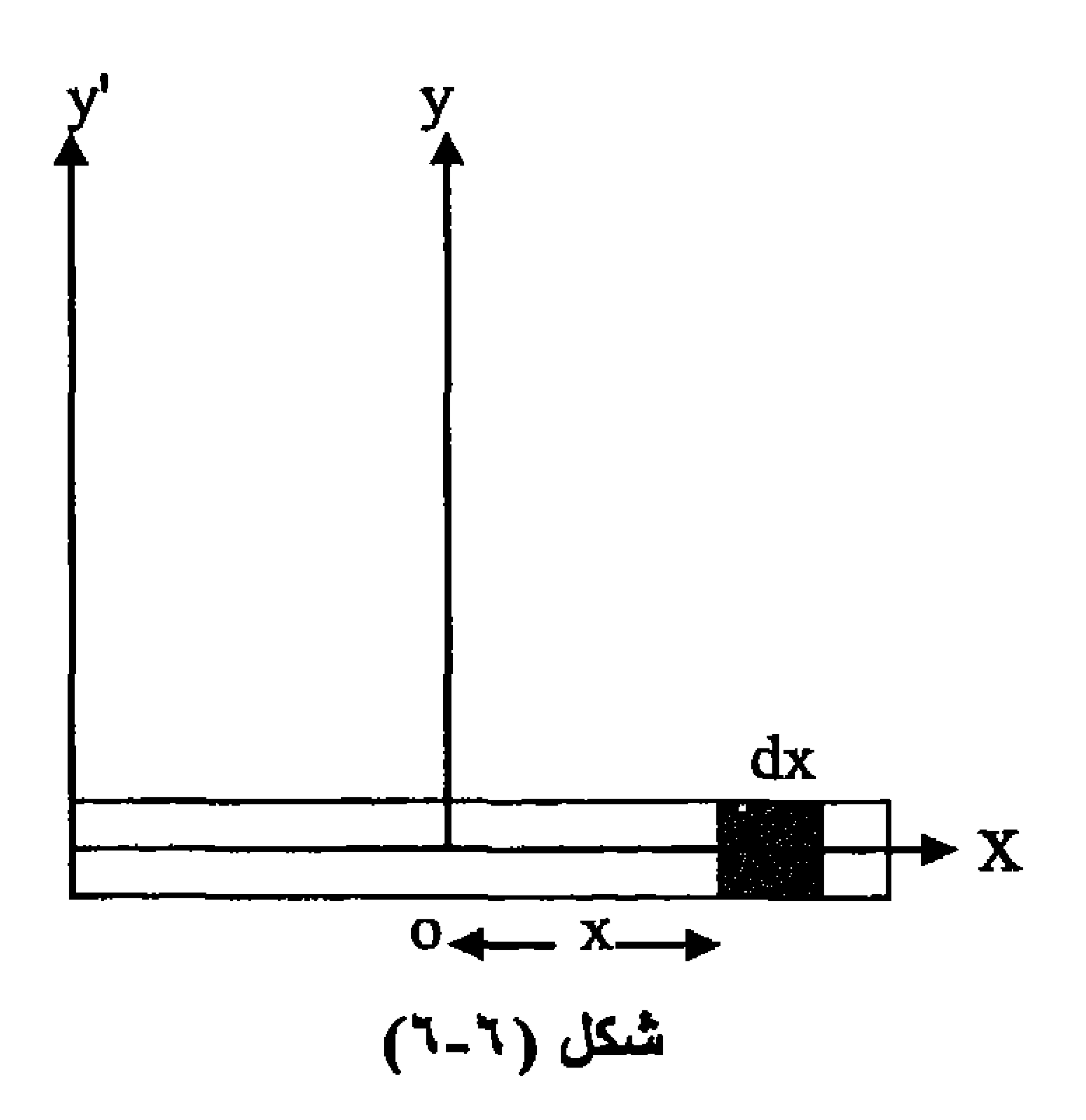
$$I_{oz} = I_{ox} + I_{oy} \qquad (4)$$

نستنتج من (4) أن عزم القصور الذاتي لصفيحة مستوية حول محور عمودي على مستواها يكافئ مجموع عزمي القصور الذاتي لنفس الصفيحة حول محورين متعامدين في مستوى الصفيحة ويتقاطعان مع المحور الأول.

٦/٥- أمثلة :

مثال (١) : أحسب عزم القصور الذاتي لقضيب منتظم طوله 2a حول محور عمودي عليه ويمر بمنتصفه. ثم استنتج عزم القصور للقضيب حول محور عمودي عليه ويمر بأحد طرفيه.

الحل :



شكل (٦-٦)

باعتبار المحور oy هو المحور العمودي على القضيب ويمر بمنتصفه، ox المحور في اتجاه القضيب كما في الشكل (٦-٦)، بأخذ عنصر طوله dx ويبعد x عن محور oy، فإن عزم القصور الذاتي العنصر حول المحور oy هو

$$dI_{oy} = x^2 dm \quad (1)$$

حيث dm كتلة العنصر و تعطى على الصورة

$$dm = \rho dx \quad (2)$$

و ρ الكثافة الطولية للقضيب و تساوي الكتلة لوحدة الأطوال حيث

$$\rho = \frac{M}{2a} \quad (3)$$

حيث M كتلة القضيب و بالتعويض من (2) في (1) و فإن عزم القصور الذاتي للقضيب كله حول المحور oy هو

$$I_{oy} = \rho \int_{-a}^{a} x^2 dx \quad (4)$$

وبتكامل (4) نحصل على عزم القصور الذاتي للقضيب حول المحور oy على الشكل

$$I_{oy}=\frac{2}{3}\rho a^2 \qquad (5)$$

و بالتعويض من (3) في (5) نستنتج أن

$$I_{oy}=\frac{1}{3}Ma^2 \qquad (6)$$

ولإيجاد عزم القصور الذاتي للقضيب حول المحور y'' الذي يمر بأحد طرفي القضيب وعمودياً عليه أنظر الشكل (٦–٦) ، نستخدم نظرية المحاور المتوازية حيث

$$I_{y'}=I_{oy}+Ma^2 \qquad (7)$$

و باستخدام (6) في (7) نستنتج أن

$$I_{y'}=\frac{3}{4}Ma^2 \qquad (8)$$

مثال (٢): أحسب عزم القصور الذاتي لصفيحة على شكل مستطيل أبعادها $2a,\ 2b$ حول:

أ. محور موازي للضلع $2b$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة،
ب. محور موازي للضلع $2a$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة،
ج. محور منطبق على الضلع $2b$.
د. محور منطبق على الضلع $2a$.

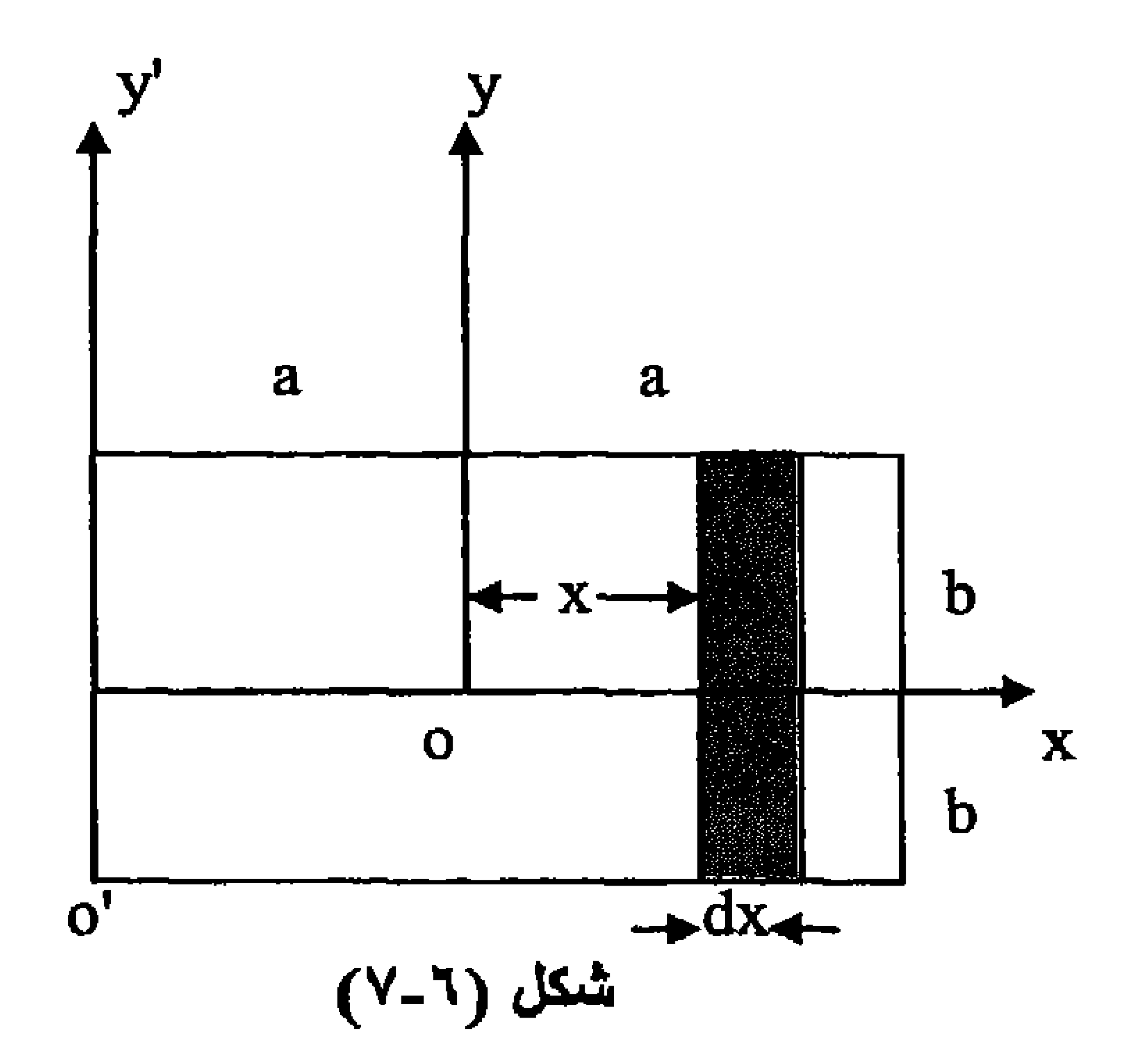
الحل :

أ. باعتبار o مركز ثقل الصفيحة مارة بها محوري الإحداثيات ox ، oy في مستوى الصفيحة كما بالشكل (٦–٧)، نقسم الصفيحة إلى شرائح مستطيلة موازية للمحور oy ، فإن عزم القصور الذاتي لعنصر الشريحة هو

$$dI_{oy}=x^2dm \qquad (1)$$

حيث dm كتلة العنصر و تعطى على الصورة

$$dm=\rho(2b\,dx) \qquad (2)$$



شكل (٦-٧)

و ρ الكثافة المساحية للصفيحة و تساوي الكتلة لوحدة المساحات حيث

$$\rho = \frac{M}{4ab} \qquad (3)$$

حيث M كتلة القضيب و بالتعويض من (2) في (1) فإن عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور oy هو

$$I_{oy} = 2\rho b \int_{-a}^{a} x^2 dx \qquad (4)$$

وبتكامل (4) نحصل على عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور oy على الشكل

$$I_{oy} = \frac{4}{3}\rho b a^2 \qquad (5)$$

و بالتعويض من (3) في (5) نستنتج أن

$$I_{oy} = \frac{1}{3} M a^2 \qquad (6)$$

ب. بالمثل وبنفس الطريقة ولكن نقسم الصفيحة إلى شرائح مستطيلة كتلة كل منها dm وموازية للمحور ox نحصل على

$$I_{ox} = \frac{1}{3} M b^2 \qquad (7)$$

ج. بتطبيق نظرية المحاور المتوازية من الشكل (٦-٧) نجد أن

$$I_{oy'} = I_{oy} + Ma^2 \qquad (8)$$

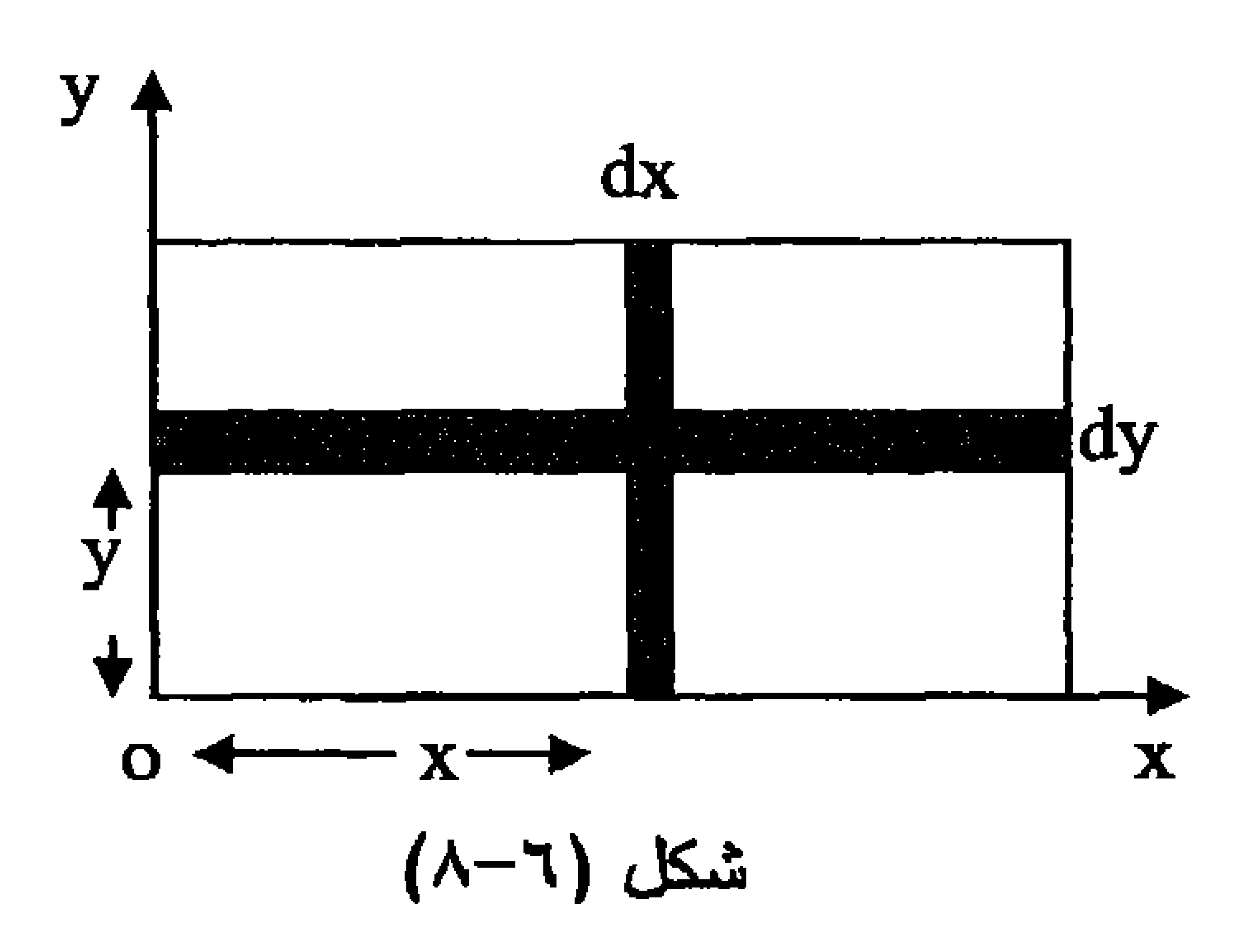
بالتعويض من (6) في (8) نستنتج أن عزم القصور حول محور منطبق على الضلع $2b$ أي حول المحور oy' كما بالشكل (٦-٧)

$$I_{oy'} = \frac{4}{3}Ma^2 \qquad (9)$$

د. بتطبيق نظرية المحاور المتوازية من الشكل نجد أن

$$I_{ox'} = I_{ox} + Mb^2 \qquad (10)$$

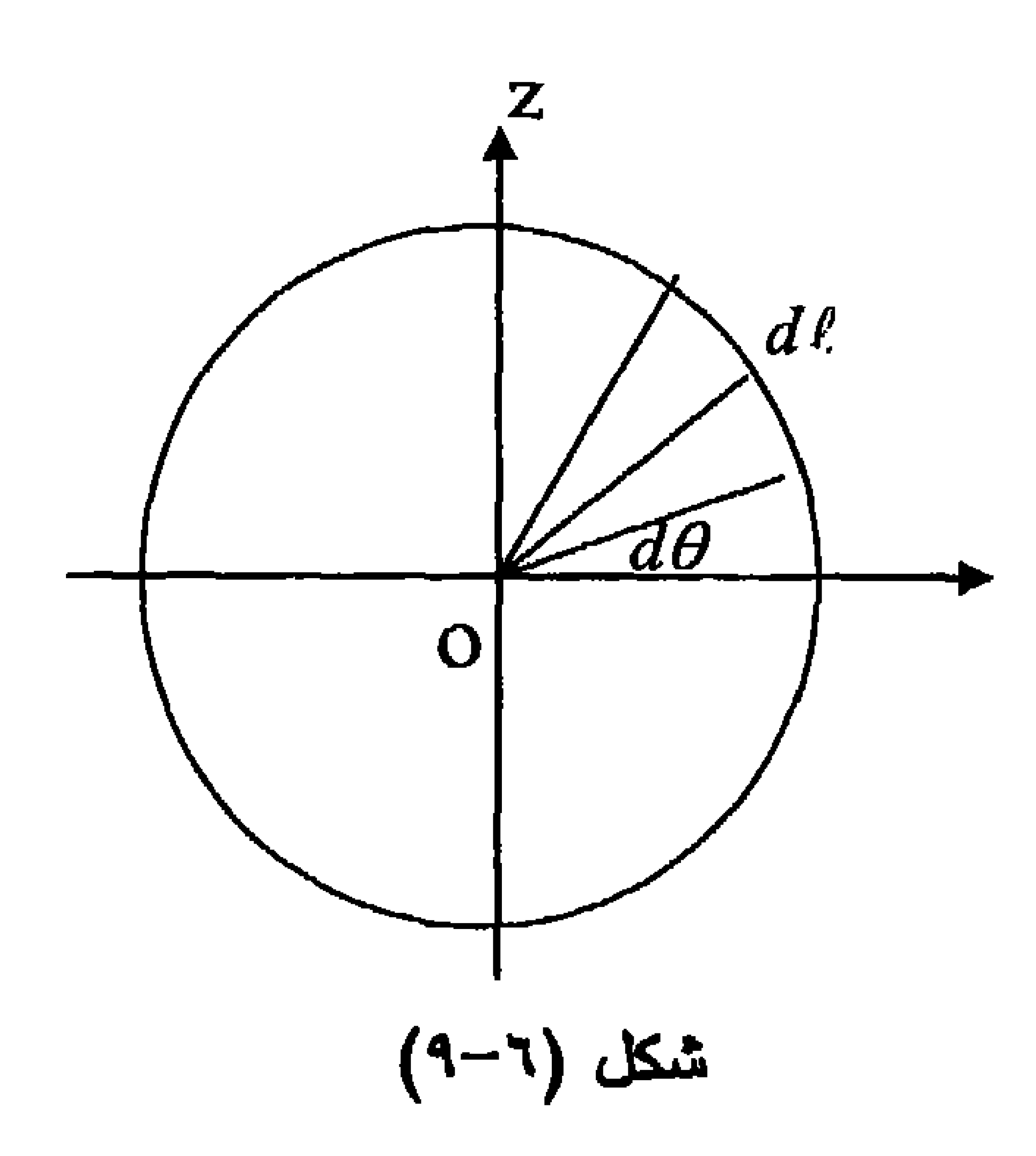
بالتعويض من (7) في (9) نستنتج أن عزم القصور حول محور منطبق على الضلع $2a$ أي حول المحور ox' كما بالشكل (٦-٧). ويمكن إثباتها بدون استخدام نظرية المحاور المتوازية بنفس طريقة الفقرة (ب) ولكن حدود التكامل يتغير $y:0 \to b$ وأيضاً بالنسبة إلى الفقرة (ج) حدود التكامل $x:0 \to b$ كما بالشكل (٦-٨) (يترك للطالب كتمرين).



شكل (٦-٨)

مثال (٣): اوجد عزم القصور الذاتي لحلقة دائرية منتظمة نصف قطرها a حول محور عمودي على مستواها ويمر بمركزها.

الحل:



شكل (٦-٩)

نقسم الحلقة إلى عناصر على شكل أقواس (أطوال صغيرة) طول العنصر $d\ell$،
فإن عزم القصور الذاتي للعنصر حول محور عمودي على مستواها ويمر بالمركز o هو

$$dI_o = a^2 dm \tag{1}$$

حيث dm كتلة العنصر و تعطى على الصورة

$$dm = \rho d\ell = \rho a d\theta \tag{2}$$

و ρ الكثافة الطولية للحلقة و تساوي الكتلة لوحدة الأطوال أي أن

$$\rho = \frac{M}{2a\pi} \tag{3}$$

حيث M كتلة الحلقة و بالتعويض من (2) في (1) فإن عزم القصور الذاتي للحلقة حول المحور oz هو

$$I_{oz} = \rho a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \tag{4}$$

نستنتج من (4) أن عزم القصور الذاتي حول للحلقة هو:

$$I_{oz} = 2\pi \rho a^3 \tag{5}$$

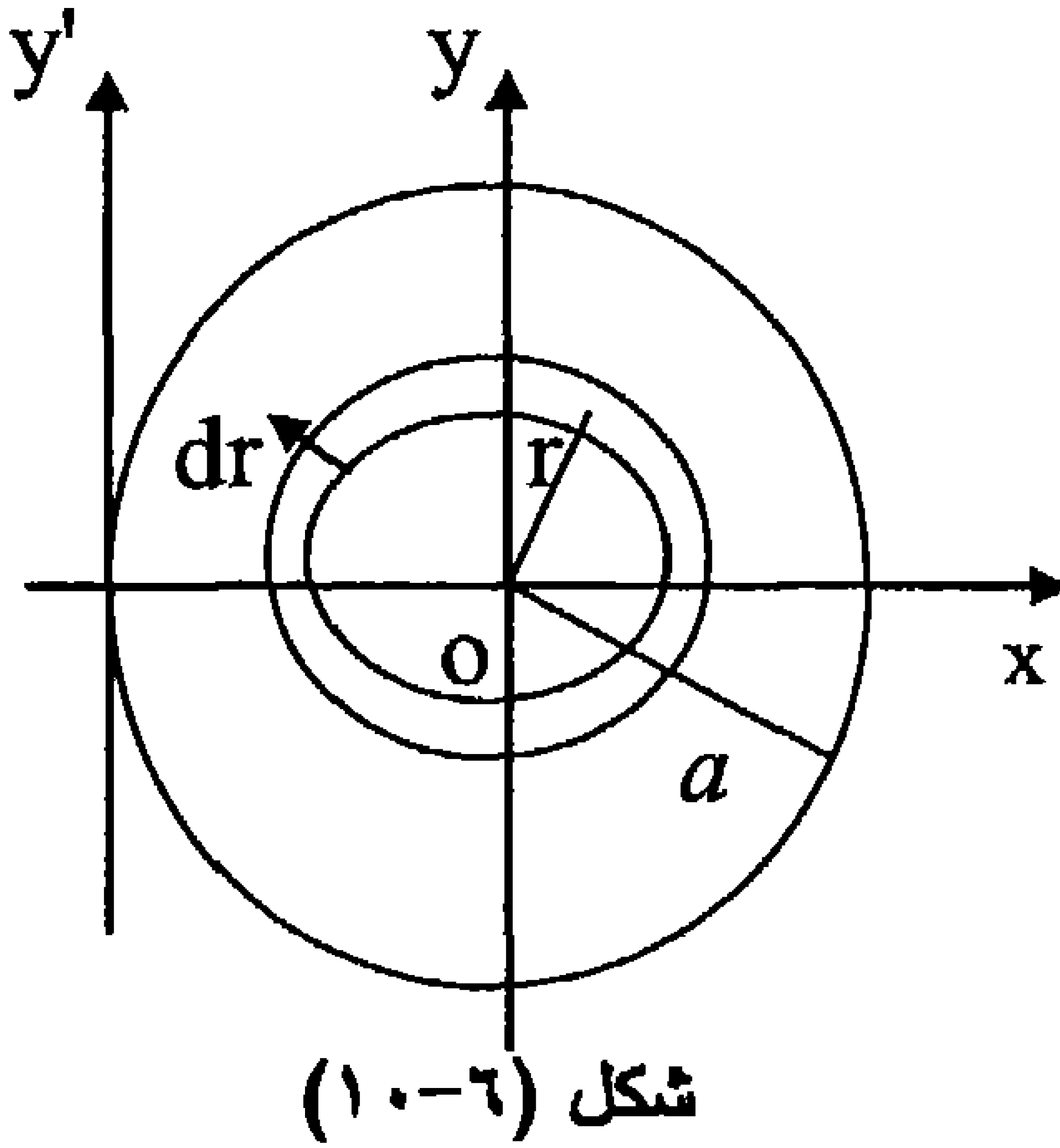
و بالتعويض من (3) في (5) نستنتج أن

$$I_{oz} = M a^2 \tag{6}$$

و (6) تعطي عزم القصور الذاتي لحلقة كتلتها M و نصف قطرها a حول محور عمودي على مستواها و يمر بمركزها.

مثال (٤): اوجد عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم حول محور عمودي على مستواه ويمر بمركزه. ثم اوجد عزم القصور الذاتي للقرص حول مماس له عمودياً على مستواه أيضاً.





شكل (٦-١٠)

نفرض أن نصف قطر القرص هو a ، نقسم القرص إلى عناصر على شكل حلقات دائرية متحدة المركز مع القرص. ولكن إحدى هذه الحلقات نصف قطرها r وسمكها dr ، أنظر الشكل (٦-١٠) ، فإن عزم القصور للعنصر الذي على شكل حلقة حول المحور العمودي على مستواه هو oy

$$dI_{oy} = r^2 dm \qquad (1)$$

حيث dm كتلة العنصر (الحلقة) و تعطى على الصورة

$$dm = \rho\, ds = \rho(2\pi r\, dr) \qquad (2)$$

حيث ds محيط العنصر (الحلقة) ρ الكثافة المساحية للقرص و تساوي الكتلة لوحدة المساحات أي أن

$$\rho = \frac{M}{\pi a^2} \qquad (3)$$

، M كتلة الحلقة و بالتعويض من (2) في (1) فإن عزم القصور الذاتي للقرص حول المحور oy هو

$$I_{oy} = 2\pi\rho\int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho a^4 \qquad (4)$$

و بالتعويض من (3) في (4) نستنتج أن

$$I_{oy} = \frac{1}{2}Ma^2 \qquad (5)$$

و (5) تعطي عزم القصور الذاتي لقرص كتله M و نصف قطره a حول محور عمودي على مستواها و يمر بمركزها، و لإيجاد عزم القصور الذاتي للقرص حول مماس له عموديا مستواه كما في الشكل (٦-١٠) ، نطبق نظرية المحاور المتوازية حيث

$$I_{y'} = I_{oy} + Ma^2 \qquad (6)$$

بالتعويض من (5) في (6) نستنتج

$$I_{y'} = \frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2 \qquad (7)$$

و (7) تعطي عزم القصور الذاتي لقرص كتله M و نصف قطره a حول مماس له عموديا على مستواه.

مثال (٥) : اوجد عزم القصور الذاتي للأشكال التالية حول محورها

أ. اسطوانة مفرغة،

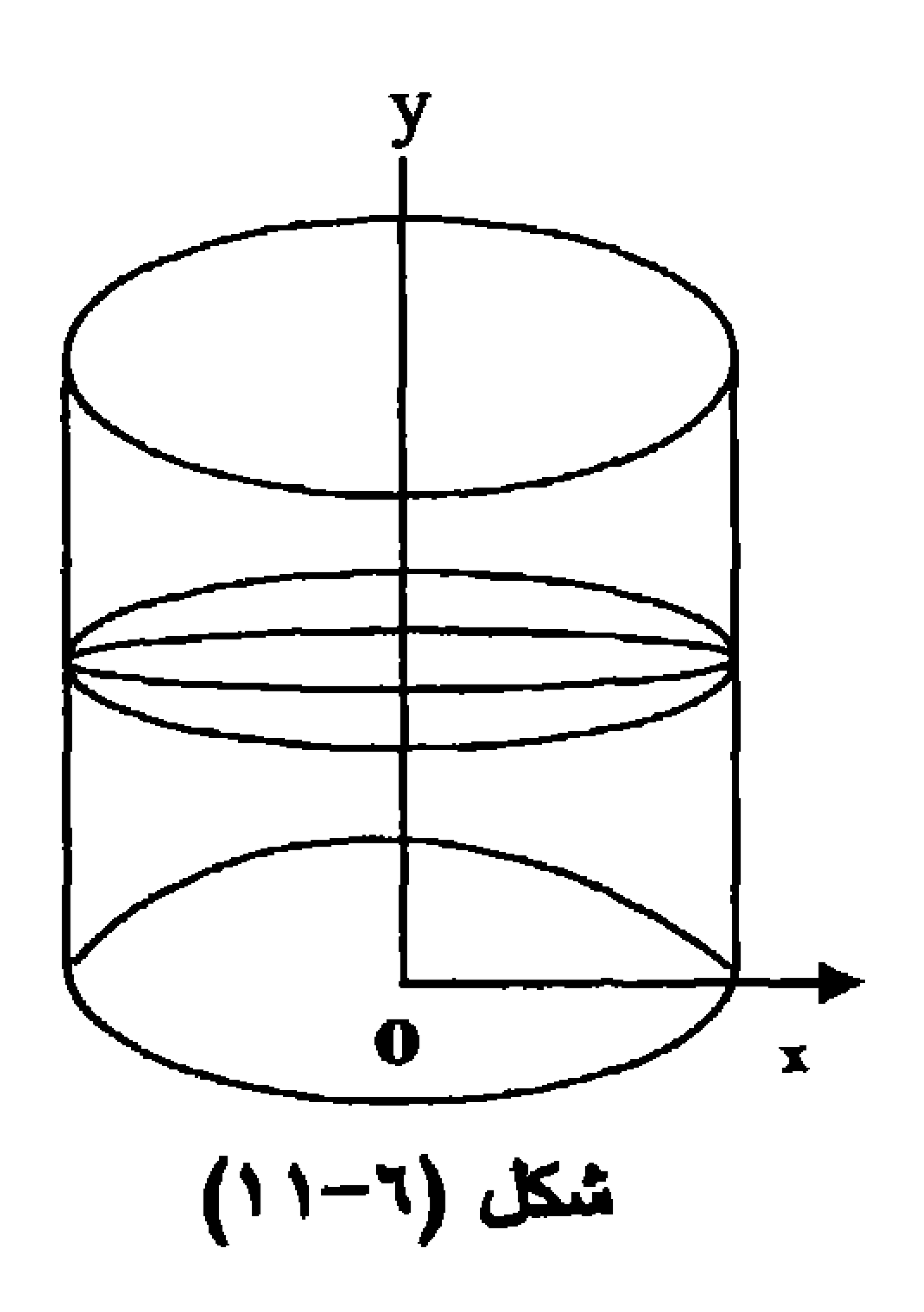
ب. اسطوانة مصمتة،

ج. (ج) قشرة كروية (كرة مفرغة)،

د. (د) كرة مصمتة.



الحل :



شكل (٦-١١)

أ. نقسم الاسطوانة إلى عناصر على شكل حلقات موازية للقاعدة كتلتها dm و نصف قطرها a ، أنظر الشكل (٦-١١)، فإن عزم القصور للعنصر هو

$$dI_{oy} = a^2 dm \tag{1}$$

و يكون من (1) عزم القصور الذاتي للاسطوانة المفرغه حول محورها هو

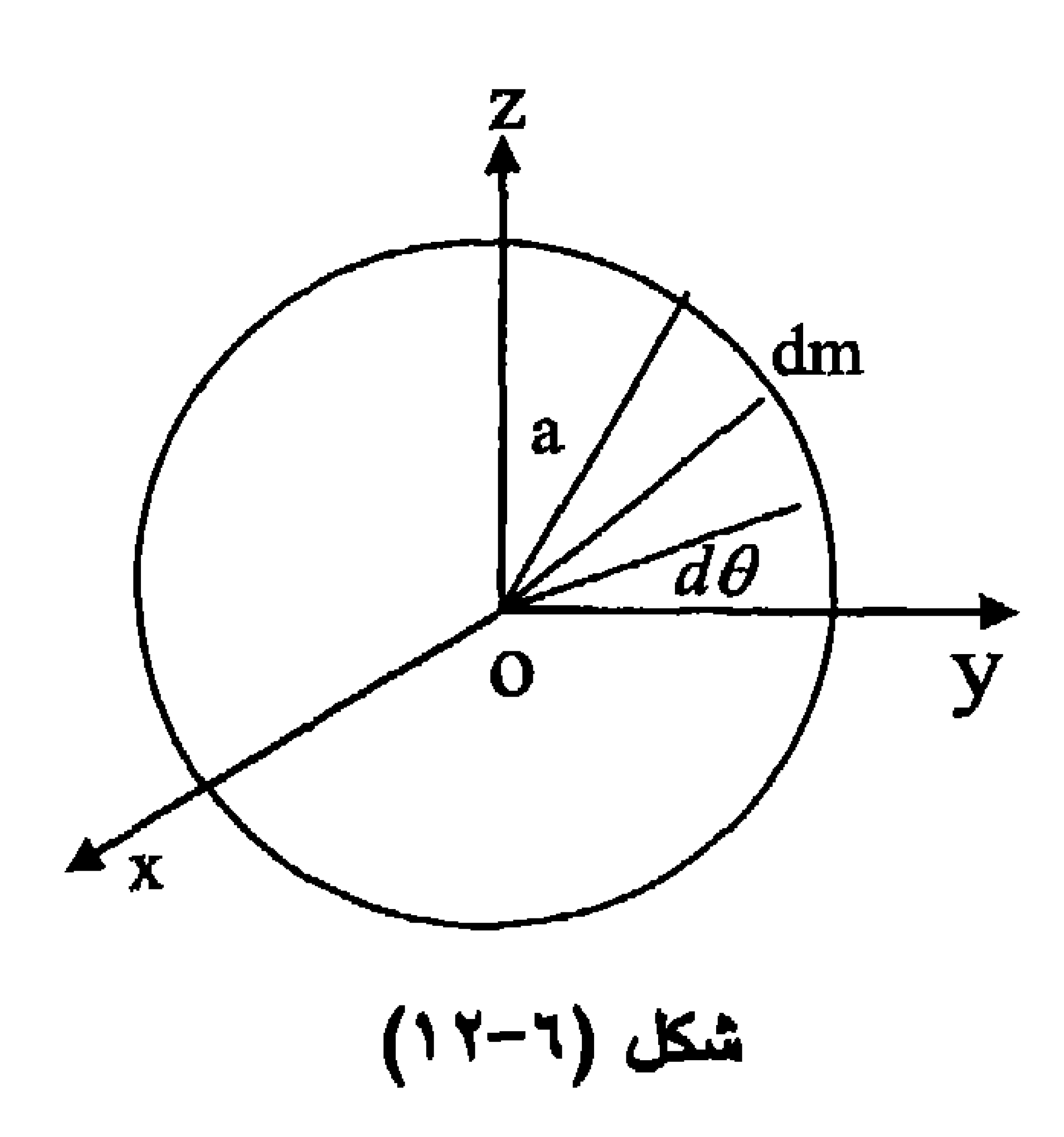
$$I_{oy} = a^2 \int dm = Ma^2 \tag{2}$$

ب. نقسم الاسطوانة إلى عناصر على شكل أقراص كتلتها dm و نصف قطرها a ، موازية للقاعدة ، أنظر الشكل (٦-١٢)، فإن عزم القصور للعنصر هو

$$dI_{oy} = \frac{1}{2} a^2 dm \tag{3}$$

و يكون من (1) عزم القصور الذاتي للاسطوانة المصمتة حول محورها هو

$$I_{oy} = \frac{1}{2} a^2 \int dm = \frac{1}{2} Ma^2 \tag{4}$$



شكل (٦-١٢)

ج. نقسم القشرة الكروية إلى عناصر كتلة كل منها dm و نصف قطرها a ، فيكون عزم القصور الذاتي للعنصر هو

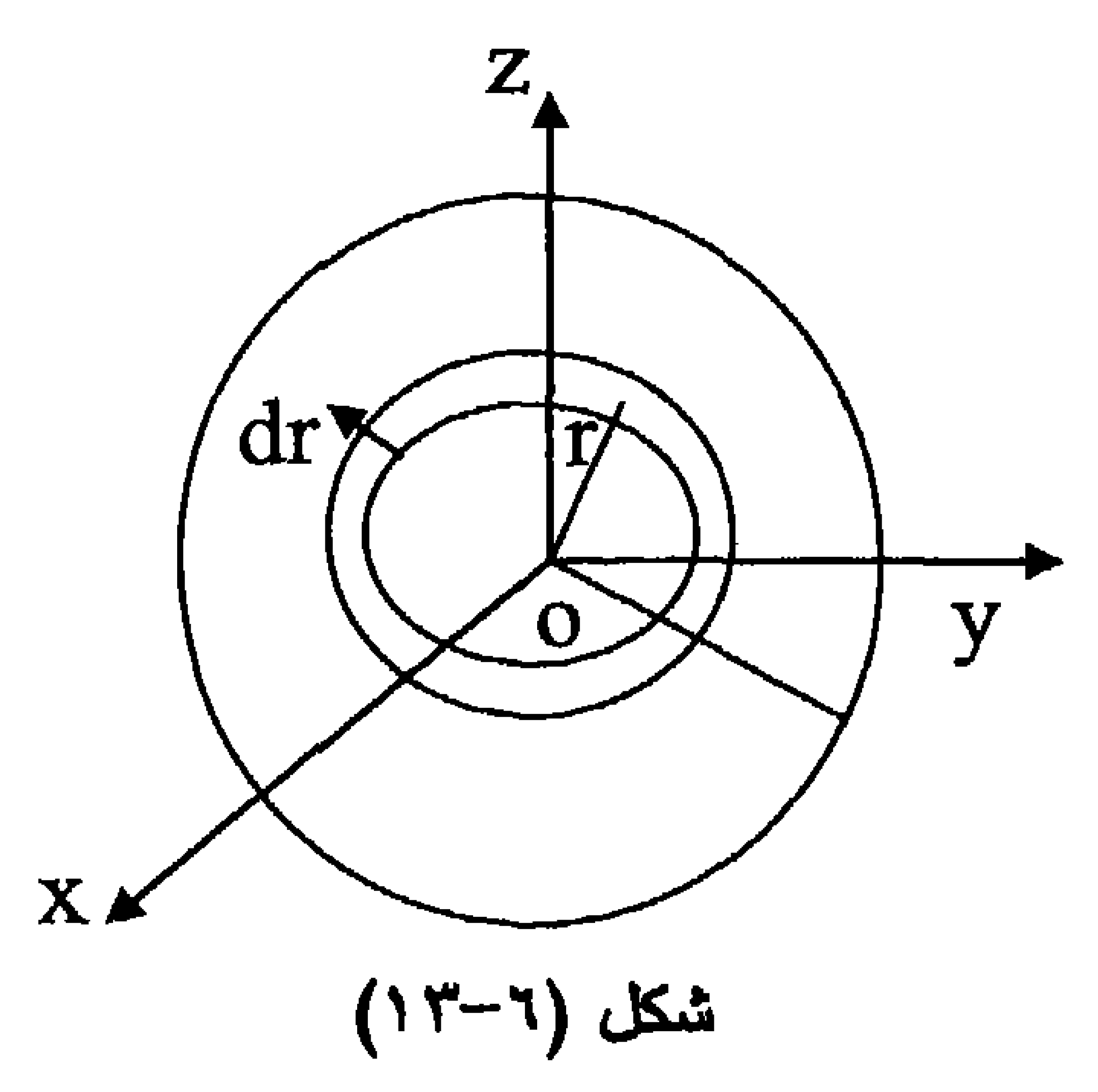
$$dI_{oz} = a^2 dm \tag{5}$$

و يكون من (5) عزم القصور الذاتي للقشرة الكروية حول محورها هو

$$I_{oz} = a^2 \int dm = Ma^2 \tag{6}$$

د. نقسم الكرة إلى عناصر على شكل قشرات كروية كتلة احداها dm و نصف قطرها r أنظر الشكل (٦-١٣)

فيكون عزم القصور الذاتي للعنصر (القشرة الكروية) هو



شكل (٦-١٣)

$$dI_{oz} = r^2 dm \tag{7}$$

حيث

$$dm = \rho\, ds = \rho\left(4\pi r^2\right) \tag{8}$$

و ρ الكثافة الحجمية و تساوي الكتلة لوحدة الحجوم، و بالتعويض من (8) في (7) و يكون عزم القصور الذاتي للقشرة الكروية حول محورها هو

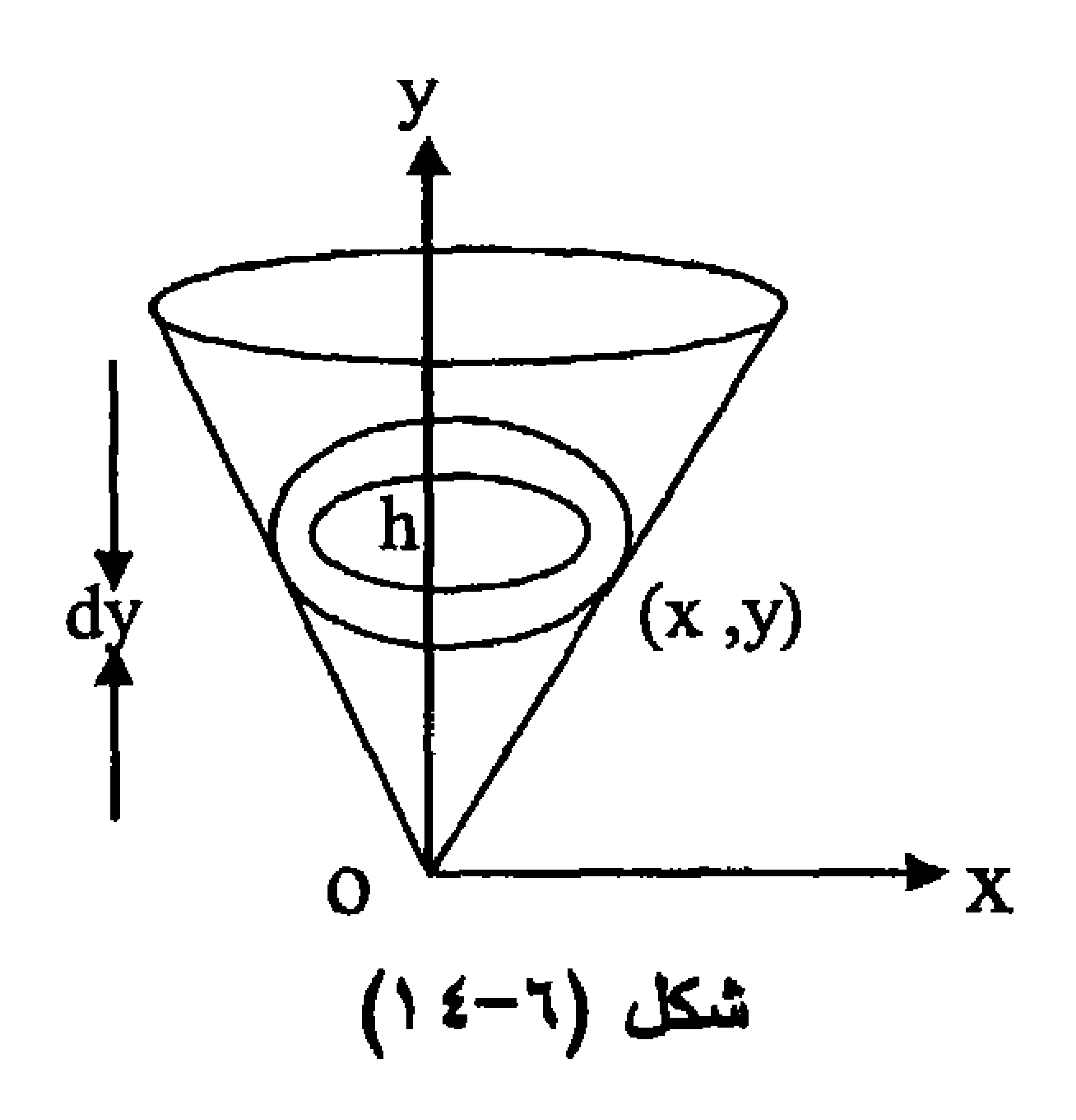
$$I_{oz} = 4\pi\rho \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi}{5}\rho a^5 \tag{9}$$

و بالتعويض عن $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ في (9) نحصل على عزم القصور الذاتي للقشرة الكروية حول محورها على الصورة

$$I_{oz} = \frac{3}{5} M a^2$$

مثال (٦): أوجد عزم القصور الذاتي لمخروط مصمت منتظم كتلته m حول محوره حول مستقيم عمودي على المحور ومار برأس المخروط.

الحل :



شكل (٦-١٤)

باعتبار محوري الإحداثيات ox ، oy حيث o رأس المخروط، oy محور المخروط ونقسم المخروط إلى أقراص موازية للقاعدة نصف قطرها x و كتلتها dm كما في الشكل (٦-١٤).

أولاً: عزم القصور الذاتي حول محوره oy

عزم القصور الذاتي للعنصر الذي على شكل قرص حول المحور هو

$$dI_{oy} = \frac{1}{2} x^2 dm \qquad (1)$$

حيث

$$dm = \rho \pi x^2 dy \qquad (2)$$

و ρ هي الكثافة الحجمية و تساوي الكثافة لوحدة الحجوم أي أن

$$\rho = \frac{3M}{\pi a^2 h} \qquad (3)$$

، M كتلة المخروط و بالتعويض من (2) في (1) فإن عزم القصور الذاتي للمخروط حول محوره oy هو

$$I_{oy} = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^h x^4 dy \qquad (4)$$

باعتبار h ارتفاع المخروط ، 2α زاوية المخروط فأنه من الشكل

$$\tan\alpha = \frac{x}{y} = \frac{a}{h} \qquad (5)$$

و بالتعويض من (4) في (3) نجد أن

$$I_{oy} = \frac{1}{2}\pi\rho\frac{a^4}{h^4}\int_0^h y^4 dy \qquad (6)$$

و بتكامل (6) نحصل على

$$I_{oy} = \frac{1}{10}\pi\rho h a^4 \qquad (7)$$

و بالتعويض من (3) في (7) نستنتج عزم القصور الذاتي للمخروط المصمت حول محوره يكون على الصورة

$$I_{oy} = \frac{3}{10}M a^2$$

ثانياً: عزم القصور الذاتي حول المحور ox

و لإيجاد عزم القصور الذاتي حول مستقيم عمودي على المحور و مار برأس المخروط نطبق نظرية المحاور المتعامدة على عنصر القرص أنظر الشكل (٦-١٤) نجد أن

$$dI_{ox} = \frac{1}{2}x^2 dm + dm\, y^2 \qquad (8)$$

بالتعويض من (2) في (8) نحصل على

$$dI_{ox} = \frac{1}{2}\rho\pi x^4 dy + \rho\pi x^2 y^2 dy \qquad (9)$$

بالتعويض من (1) في (9) نجد أن

$$dI_{ox} = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}y^4 dy + \rho\pi\frac{a^2}{h^2}y^4 dy \qquad (10)$$

و و بتكامل (10) نحصل على

$$I_{ox} = \frac{1}{10}\rho\pi a^4 h + \rho\pi\frac{a^2}{5}h^3 \qquad (11)$$

و بالتعويض عن ρ من (3) في (11) نستنتج عزم القصور الذاتي لمخروط مصمت حول محور عمودي على محوره و مار برأسه على الصورة

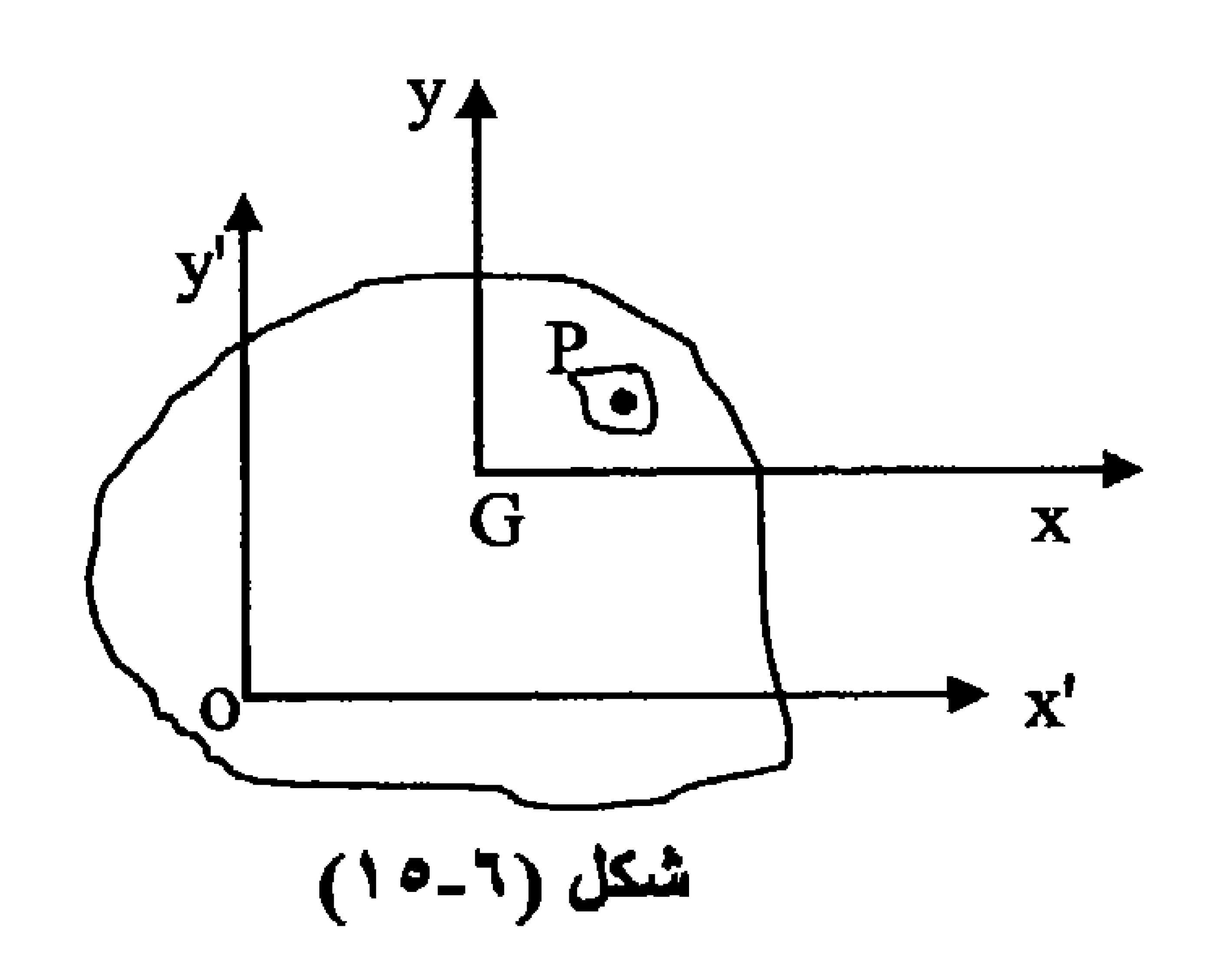
$$I_{ox} = \frac{3}{10}M\left[a^2 + 2h^2\right]$$

٦/٦- نظرية المحاور المتوازية The Theory of the parallel axes :

تنص نظرية المحاور المتوازية على أن عزم القصور الذاتي لجسم متماسك حول محور ما يكافئ عزم القصور الذاتي لنفس الجسم حول محور يوازيه ويمر بمركز الثقل مضافاً إليه حاصل كتلة الجسم في مربع البعد بين المحورين.

البرهان:

نفرض أن Gx ، Gy هما المحورين المارين بمركز ثقل الجسم G ، نفرض أن ox' ، oy' هما المحورين الموازيين للمحورين Gx ، Gy ، نفرض أن النقطة ذات الكتلة dm لها الإحداثيات (x, y) ، بالنسبة إلى المحورين Gx ، Gy ، (x', y') بالنسبة إلى المحورين ox' ، oy' حيث o نقطة اختيارية ويفرض أن $(\bar{x}, \bar{y})$ هي إحداثيات مركز الثقل G بالنسبة للمحورين oy' ox' أنظر الشكل (٦-١٥) فإن:



شكل (٦-١٥)

$$x' = x + \bar{x} \quad , \quad y' = y + \bar{y} \tag{1}$$

نعلم أن

$$I_{Gx} = \sum dm y^2 \quad ، \quad I_{Gy} = \sum dm x^2 \tag{2}$$

أيضاً

$$I_{ox'} = \sum dm y'^2 \quad ، \quad I_{oy'} = \sum dm x'^2 \tag{3}$$

و بالتعويض من (1) في (3) نجد أن

$$I_{ox'} = \sum dm (y + y')^2 = \sum dm y^2 + 2\bar{y} \sum dm y + \bar{y}^2 \sum dm \tag{4}$$

ولكن نعلم أن

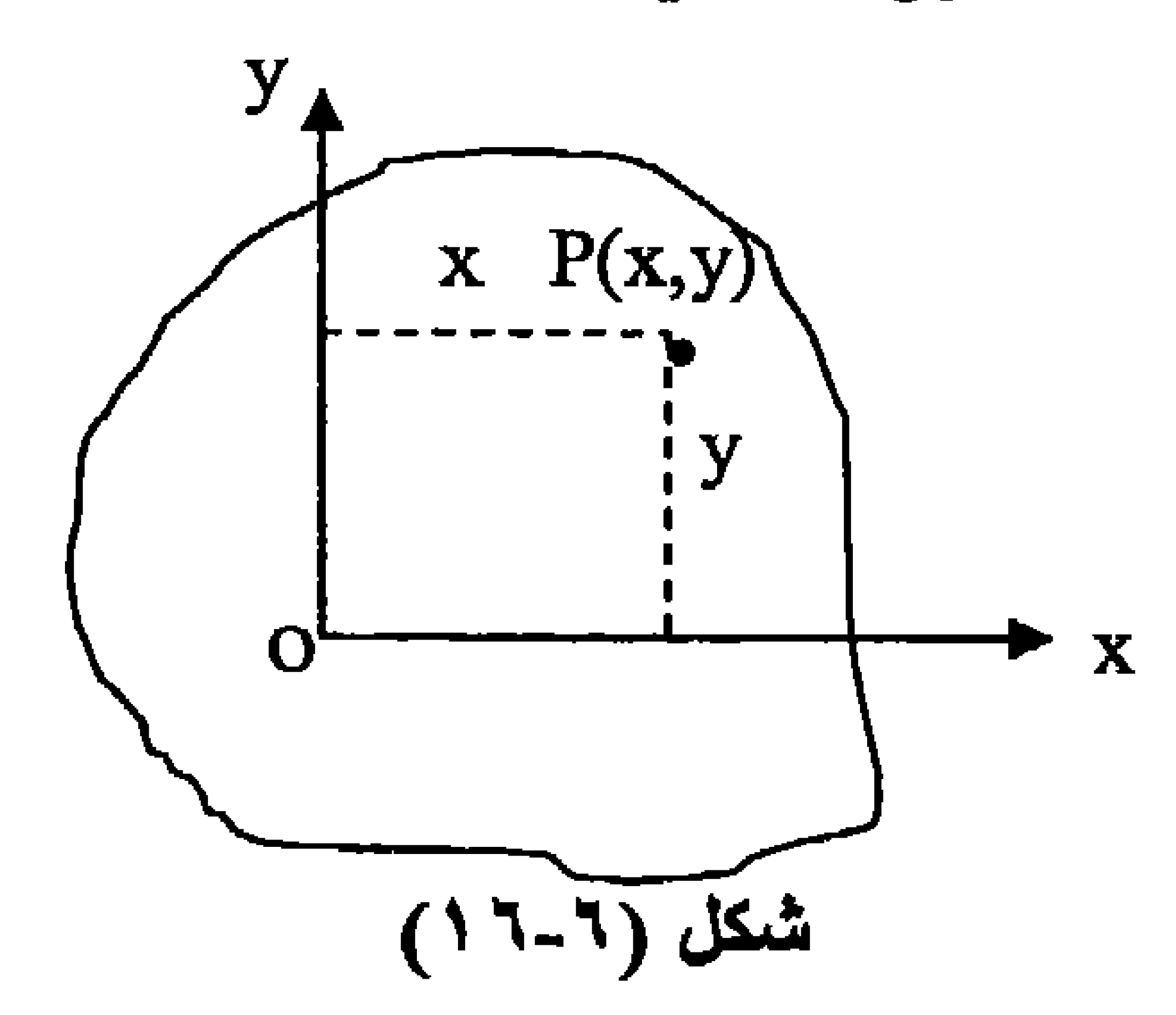
$$\sum dm\,y = m\bar{y} = 0 \quad , \quad \sum dm = m \qquad (5)$$

حيث (5) تمثل العزم الأول للكتلة حول محاور تمر بمركز الثقل و بالتعويض في (4) نستنتج أن

$$I_{ox'} = I_{Gx} + m\bar{y}^2 \qquad (6)$$

نستنتج من (6) أن عزم القصور الذاتي لجسم جاسئ حول محور ما يكافئ عزم القصور الذاتي لنفس الجسم حول محور يوازيه و يور بمركز الثقل مضافاً حاصل ضرب كتلة الجسم في مربع البعد بين المحورين.

٦/٧- حاصل ضرب القصور الذاتي Product of Inertia :



شكل (٦-١٦)

نعتبر صفيحة رقيقة مستوية ولنفرض أن ox ، oy محوران متعامدان في مستوى هذه الصفيحة، ولنفرض أن $P(x,y)$ إحدى نقط هذه الصفيحة وأن كتلتها dm ، فإن عزم القصور الذاتي لهذه الصفيحة حول ox هو

$$I_{ox} = \sum dm\,y^2 \qquad (1)$$

أيضاً عزم القصور الذاتي لهذه الصفيحة حول oy هو

$$I_{oy} = \sum dm\,x^2 \qquad (2)$$

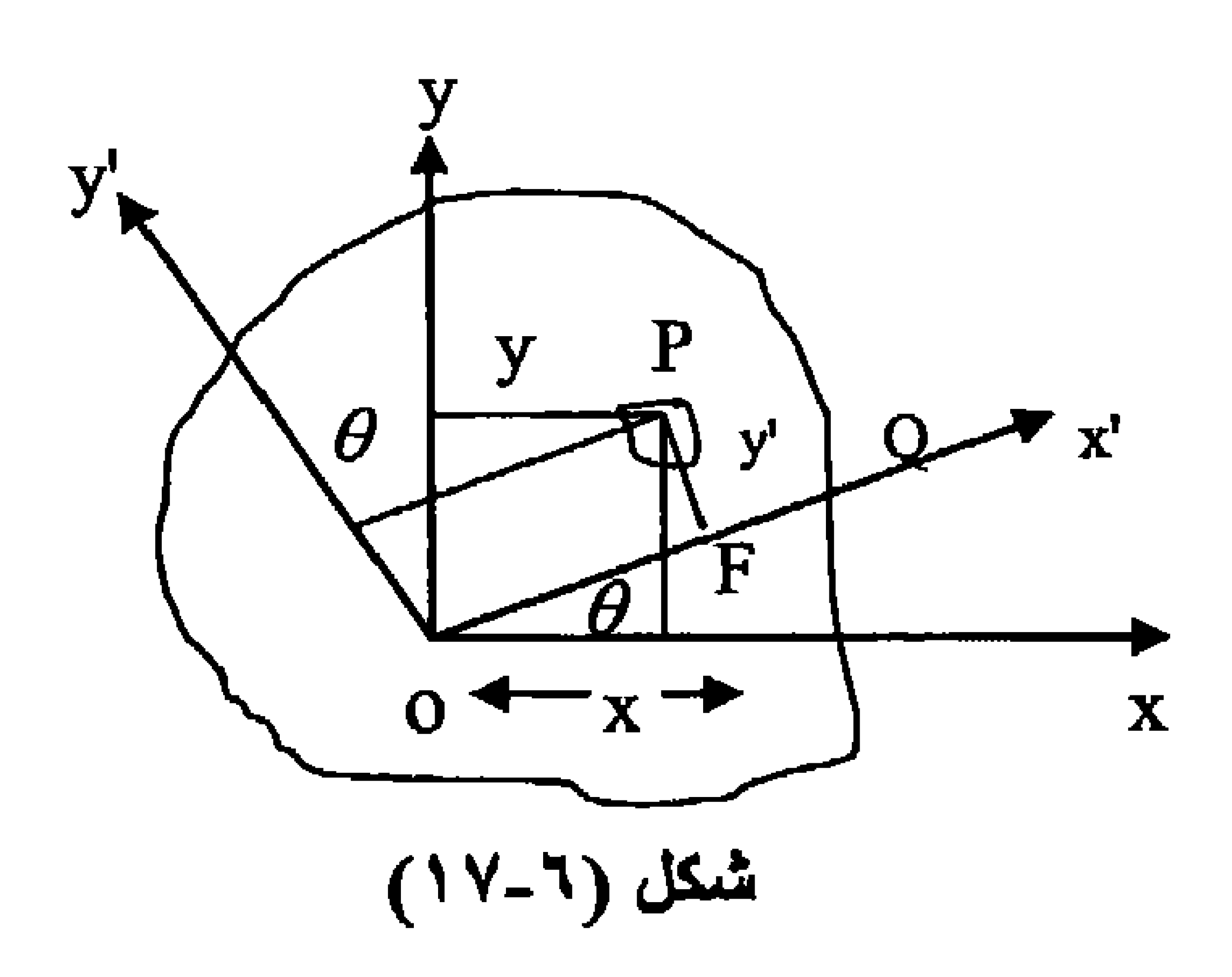
وكذلك تسمى الكمية I_{xy} بحاصل ضرب القصور الذاتي للصفيحة بالنسبة للمحورين ox ، oy و يعرف على النحو التالي

$$I_{xy} = \sum dm(xy) \qquad (3)$$

ملحوظة هامة: ينعدم حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة بالنسبة لمحورين متعامدين في مستواها أحدهما محور تماثل.

٨/٦- نظرية المحاور المائلة Theory of oblique axes :

لإيجاد عزم القصور الذاتي لصفيحه حول أي مستقيم في مستواها إذا علم عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محورين متعامدين ox ، oy في مستواها وحاصل ضرب القصور الذاتي لها بالنسبة لهذين المحورين فإنه يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي للصفيحة حول أي مستقيم في مستوى الصفيحة ماراً بالنقطة o ، لذلك نعتبر صفيحة مستوية ولنفرض أن $o\bar{Q}$ أي مستقيم في مستوى الصفيحة والمطلوب إيجاد عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور $o\bar{Q}$ ، كما في الشكل (٦-١٧)



شكل (٦-١٧)

نفرض أن ox oy ، محوران متعامدان في مستوى الصفيحة عند o ولنفرض أن المستقيم $o\bar{Q}$ يميل بزاوية θ على P . ونفرض أن P نقطة غير مميزة من الصفيحة وأن كتلتها dm وأن إحداثيات P بالنسبة إلى المحورين ox ، oy هي (x,y) وباعتبار PF عمودي على oQ فإن

$$I_{oQ} = \int dm(P\vec{F})^2 \qquad (1)$$

وباعتبار المحوران المتعامدين ' ox', oy' بحيث ox' ينطبق على المحور oQ وإذا كانت إحداثيات النقطة P بالنسبة إلى المحورين' ox' , oy' هي x' ، y'

فإن

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad (2)$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta \qquad (3)$$

بالتعويض من (2) ، (3) نجد أن

$$I_{oQ} = \int dm(y\cos\theta - x\sin\theta)^2 \qquad (4)$$

و من (4) نجد أن

$$I_{oQ} = \int dm(y^2\cos^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + x^2\sin^2\theta) \qquad (5)$$

و يمكن وضع (5) على الصورة الآتية

$$I_{oQ} = \cos^2\theta\int dm\, y^2 - 2\cos\theta\sin\theta\int xy\, dm + \sin^2\theta\int x^2\, dm$$

$$= I_{ox}\cos^2\theta - 2I_{xy}\cos\theta\sin\theta + I_{oy}\sin^2\theta \qquad (6)$$

$$= A\cos^2\theta - 2F\cos\theta\sin\theta + B\sin^2\theta$$

حيث

$$A = \int y^2\, dm\ ,\quad B = \int x^2\, dm\ ,\quad F = \int xy\, dm \qquad (7)$$

و من النتيجة (6) نستنتج أن

$$I_{ox'} = A' = A\cos^2\theta - 2F\cos\theta\sin\theta + B\sin^2\theta \qquad (8)$$

و بوضع $\frac{\pi}{2}+\theta$ بدلا من θ في (8) نستنتج أن

$$I_{oy'} = B' = A\sin^2\theta + 2F\cos\theta\sin\theta + B\cos^2\theta \qquad (9)$$

و بجمع (8) ، (9) نحصل على

$$A' + B' = A + B \qquad (10)$$

من (10) نستنتج أن " مجموع عزمي القصور الذاتي حمل محورين متعمدين لا يتغير بدوران المحورين زاوية θ"

و يمكن استنتاج حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة إلي المحورين المتعامدين ox' ، oy', على النحو التالي

$$F'=\int dm(x'y') \tag{11}$$

و بالتعويض من (2) ، (3) في (11) نحصل على

$$\begin{aligned} F' &= \int dm(x\cos\theta+y\sin\theta)(y\sin\theta-x\cos\theta) \\ &= \int (xy)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,dm+\int (y^2-x^2)\sin\theta\cos\theta\,dm \end{aligned} \tag{12}$$

باستخدام (7) و بعض المتطابقات لدوال المثلثية في (12) نجد أن

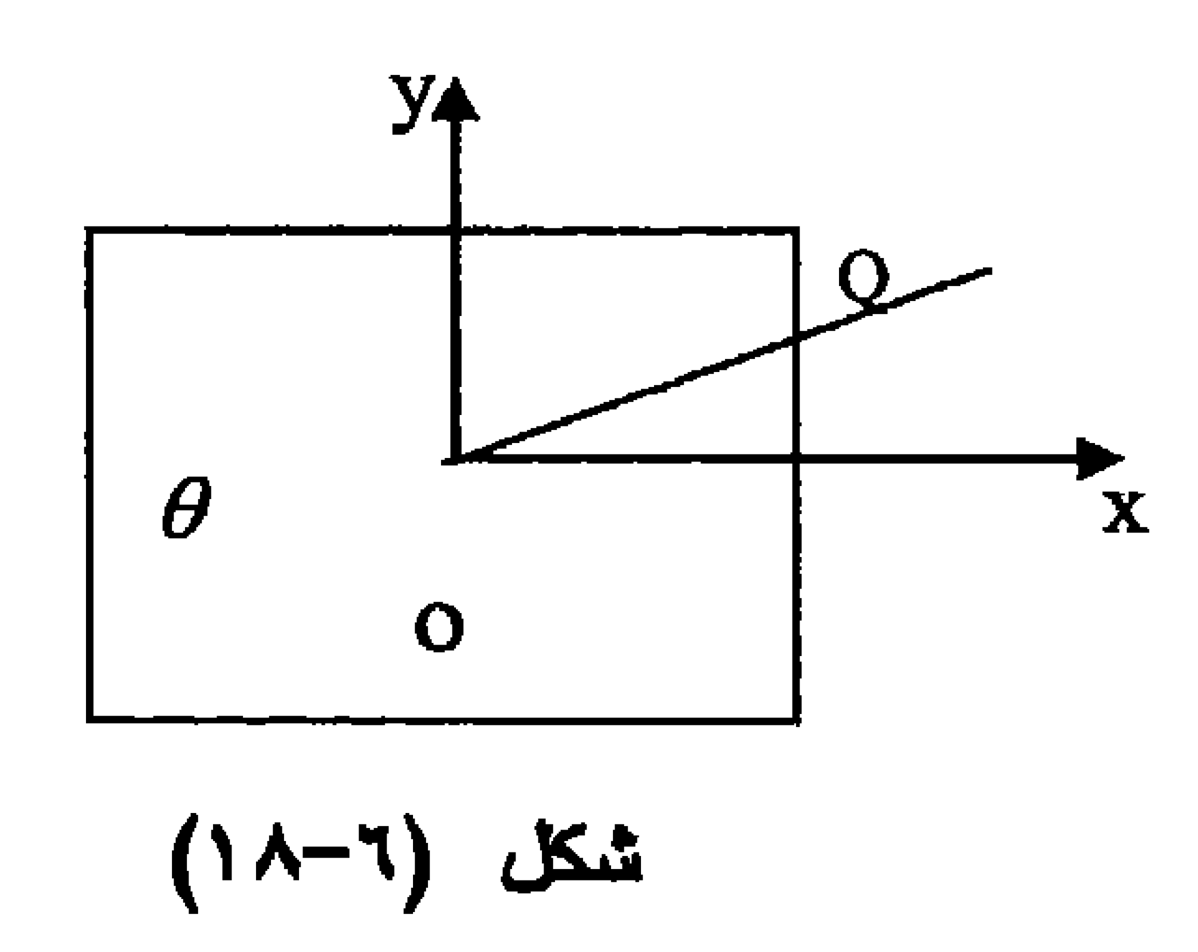
$$F'=\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\theta+F\cos 2\theta\sin\theta \tag{13}$$

العلاقة (13) تمثل حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة إلي المحورين المتعامدين ox' ، oy' .

٩/٦- أمثلة :

مثال (١): أثبت أن عزم القصور الذاتي لصفيحة مربعة الشكل حول أي محور ما بمركزها هو $\frac{1}{3}ma^2$ حيث $2a$ طول ضلع الصفيحة.

الحل:



شكل (٦-١٨)

نعلم أنه بالنسبة للصفيحة المربعة $A=\frac{1}{3}ma^2$, $B=\frac{1}{3}ma^2$, $F=0$

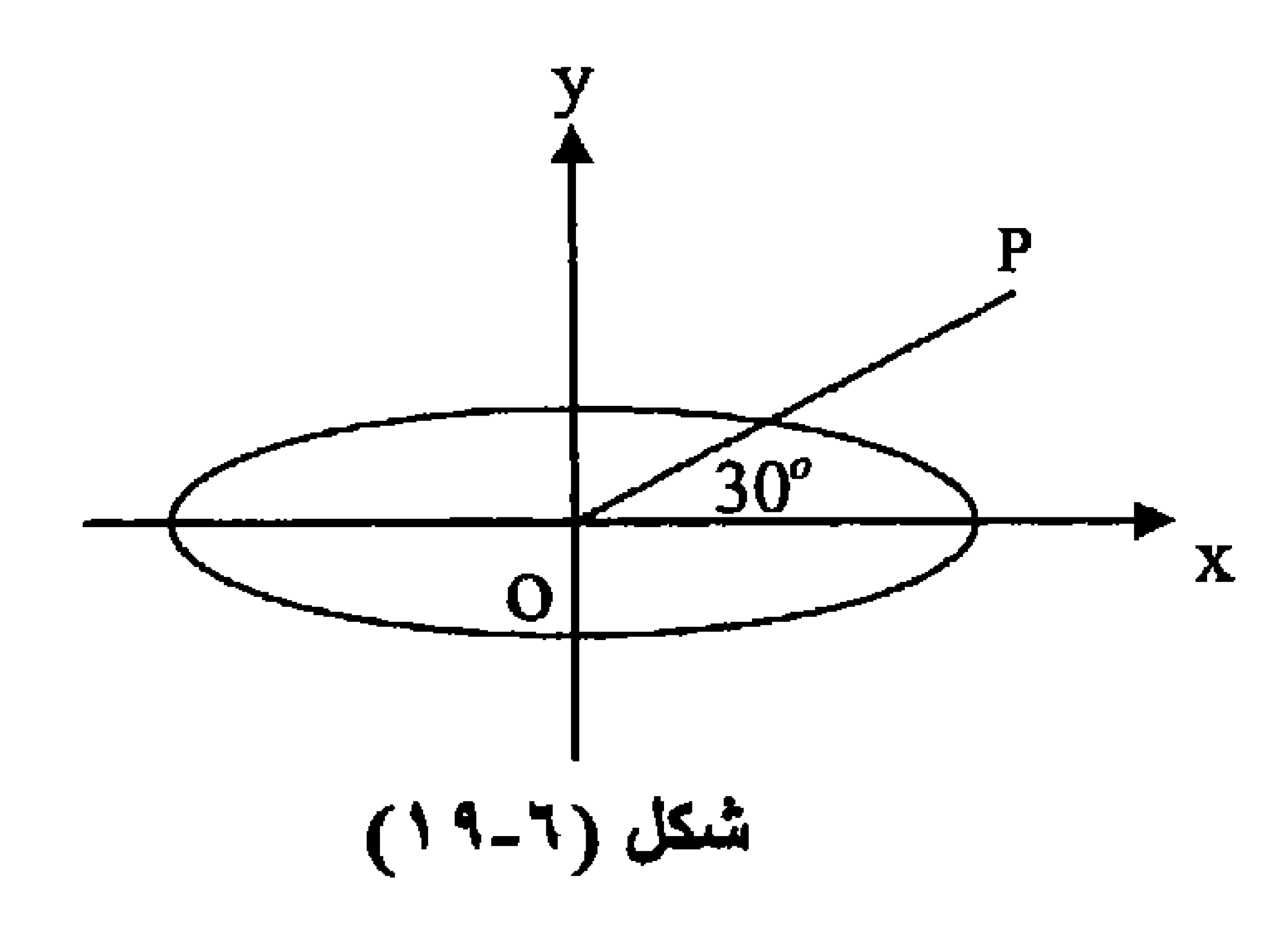
فإن عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور oQ أنظر الشكل (٦-١٨) هو

$$I_{oQ}=A'=\frac{1}{3}ma^2\cos^2\theta+\frac{1}{3}ma^2\sin^2\theta=\frac{1}{3}ma^2$$

نستنتج أن عزم القصور الذاتي لصفيحة مربعة حول أي مستقيم مار بمركزها مقدار ثابت .

مثال (٢): اوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة على هيئة قطع ناقص حول محور مر بمركز القطع ويميل بزاوية 30^o على محور القطع.

الحل:



شكل (٦-١٩)

حيث إن عزم القصور الذاتي للصفيحة حول ox،oy أنظر الشكل (٦-١٩) هي

$$F=0 \quad , \quad B=\frac{1}{4}ma^2 \quad , \quad A=\frac{1}{4}mb^2 \qquad (1)$$

$F=0$ حيث ox محور تماثل وأيضاً محور oy فإن عزم القصور الذاتي حول المحور opهو

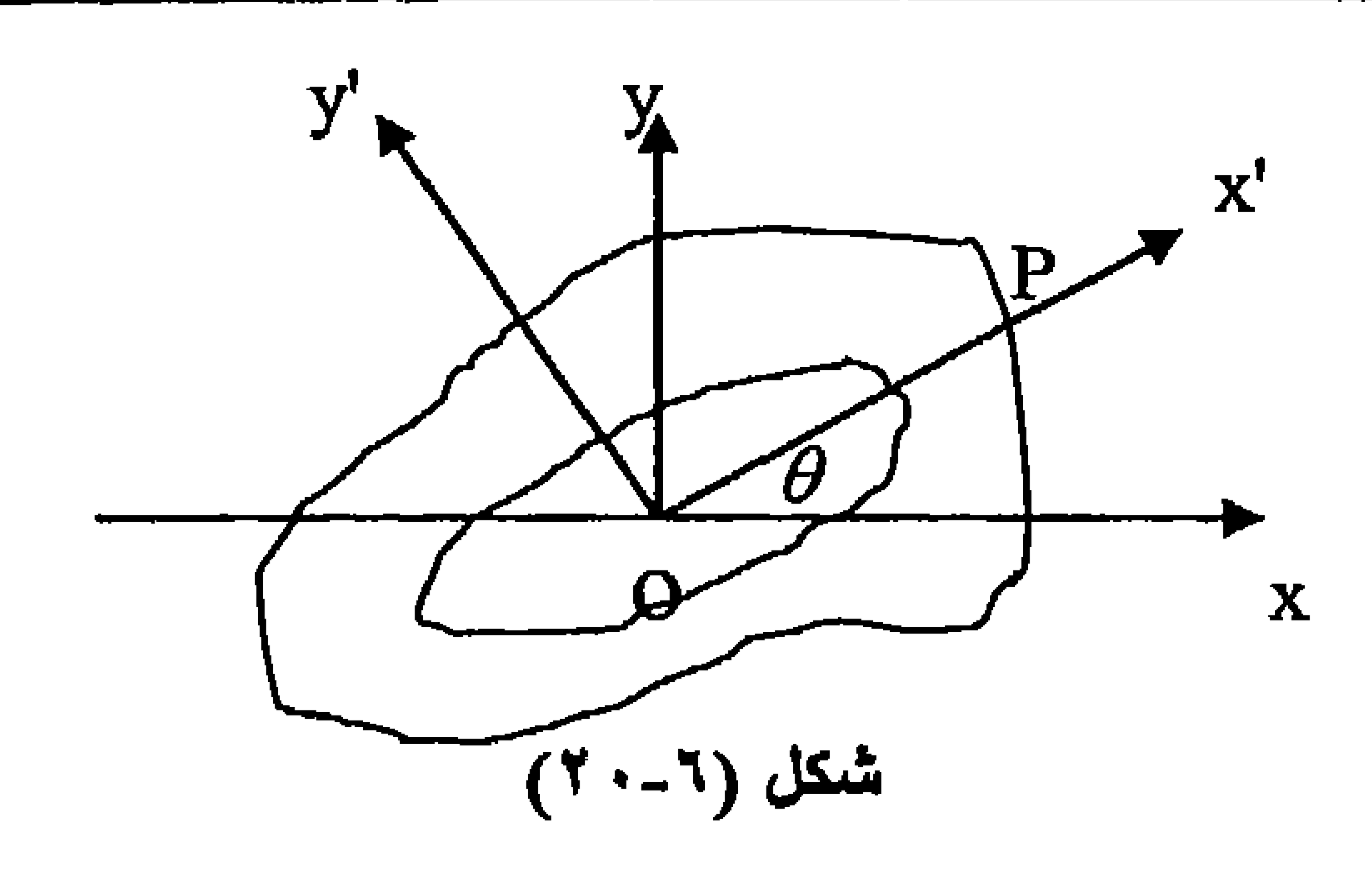
$$I_{op}=A\cos^2\theta+B\sin^2\theta-2F\cos\theta\sin\theta$$

$$=\frac{1}{4}mb^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}ma^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

$$=\frac{m}{16}\left[3a^2+b^2\right]$$

٦/١٠- قطع ناقص القصور الذاتي Ellipse of the Inertia :

نعتبر صفيحة مستوية، ox، oy محوران متعامدان في مستوى الصفيحة ، ox' أي مستقيم آخر في مستوى الصفيحة كما في الشكل (٦-٢٠)، فإن عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور ox' هو



شكل (٦-٢٠)

$$I_{ox'} = A\cos^2\theta - 2F\cos\theta\sin\theta + B\sin^2\theta \qquad (1)$$

نفرض أن P نقطة على ox' ولها الإحداثيات (x,y) وأن $oP=r$ بحيث يكون

$$I_{ox} \,\alpha \frac{1}{r^2} \qquad (2)$$

و يمكن كتابة (2) على الصورة

$$I_{ox'} = \frac{mL^4}{r^2} \qquad (3)$$

حيث L ثابت له نفس وحدات الطول، ولكن

$$x = r\cos\theta \,,\, y = r\sin\theta \qquad (4)$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$\frac{mL^4}{r^2} = A\frac{x^2}{r^2} - 2F\frac{xy}{r^2} + B\frac{y^2}{r^2} \qquad (5)$$

من المعادلة (2) نستنتج أن المحل الهندسي للنقطة P هو المنحنى

$$mL^4 = Ax^2 - 2Fxy + By^2 = const. \qquad (6)$$

وهذه معادلة قطع ناقص تسمى بقطع ناقص القصور الذاتي وحيث أنه يمكن اختيار محاور بحيث تصبح معادلة القطع (3) على الصورة

$$\overset{*}{A}x^2 + \overset{*}{B}y^2 = const. \qquad (7)$$

أي أنه بالنسبة للمحاور الجديدة يكون حاصل ضرب القصور الذاتي للصفيحة يساوي صفر ويسمى هذان المحوران بالمحورين الأساسيين للصفيحة عند o والمعاملان

A^* ، B^* يسميان بعزمي القصور الذاتي الأساسيان للصفيحة عند o. فإنه بالنسبة للمحورين الأساسيين يكون $F' = 0$ منها نستنتج

$$\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\theta + F\cos 2\theta = 0$$

و منها نجد أن

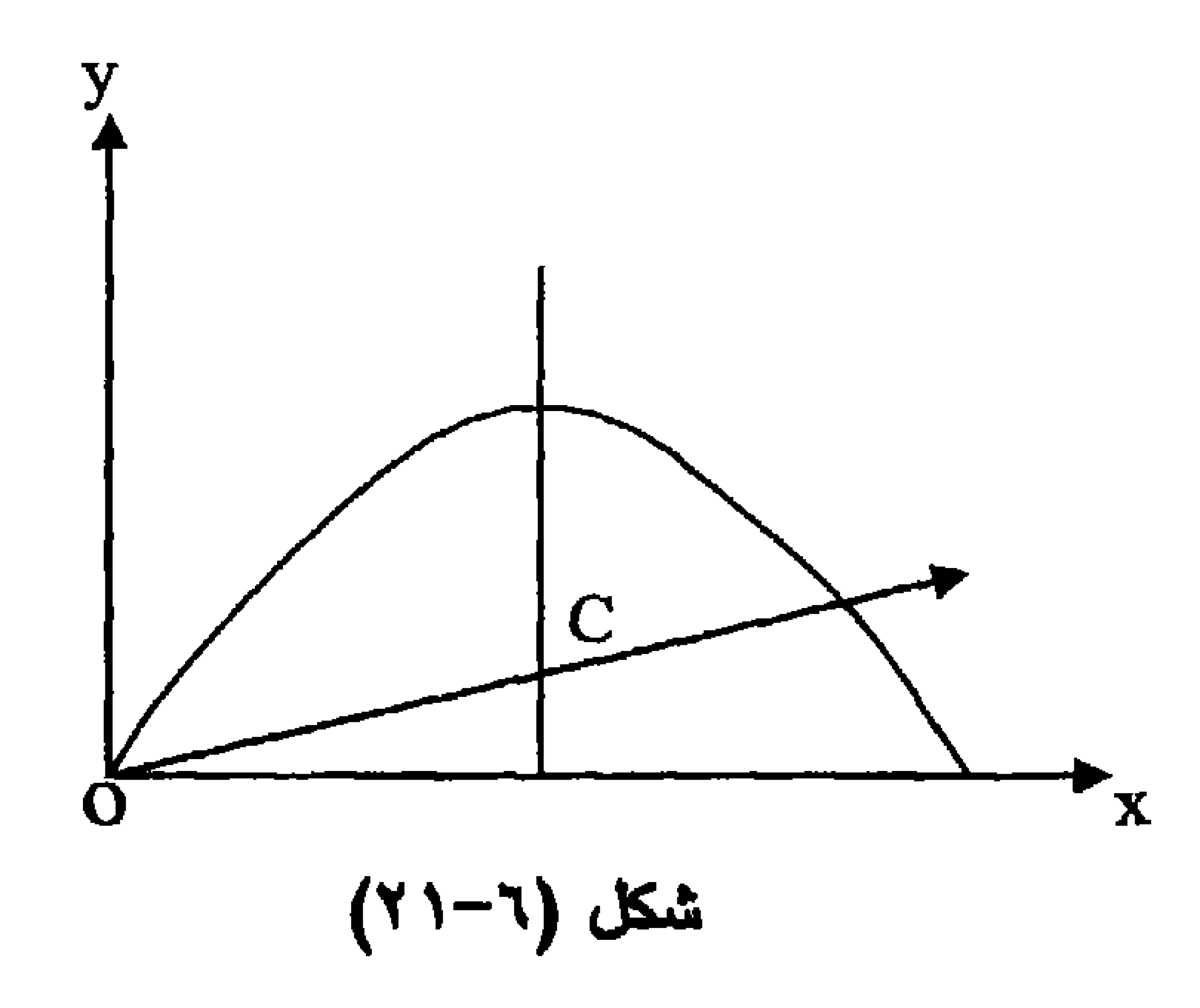
$$\tan 2\theta = \frac{2F}{B-A} \qquad (8)$$

وهذه العلاقة تعين اتجاهي المحورين الأساسيين إذ يميل أحدهما على ox بالزاوية θ والآخر بالزاوية $\theta + \frac{\pi}{2}$.

٦/١١- أمثلة :

مثال (١): اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي لنصف كرة مصمتة عند نقطة على محيط قاعدتها ثم عين المحورين الأساسيين لنصف الكرة في المستوى الرأسي المار بمركز ثقل نصف الكرة.

الحل:



شكل (٦-٢١)

أولاً : نوجد A ، B ، F عند o

$$A = \frac{2}{5}ma^2 \text{ ،} \qquad (1)$$

$$B = \frac{2}{5}ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5}ma^2 \text{ ،} \qquad (2)$$

حيث أن إحداثي مركز ثقل نصف الكرة c بالنسبة للمحورين ox ، oy هما $\left(a, \frac{3}{8}a\right)$ فإن

$$F = F_c + ma\left(\frac{3}{8}a\right) = \frac{3}{8}ma^2 \qquad (3)$$

معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند o هي

$$Ax^2 - 2Fxy + By^2 = \text{const.} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3)-(1) في (4) نجد أن

$$\frac{2}{5}ma^2x^2 - \frac{3}{8}ma^2xy + \frac{7}{5}ma^2y^2 = \text{const.}$$

ومنها نجد أن

$$2x^2 - \frac{15}{4}xy + 7y^2 = \text{const.} \qquad (5)$$

أيضاً من (1)-(2) و (3) نجد أن

$$\tan 2\theta = \frac{2F}{B-A} = \frac{3}{4}$$

أي أن

$$3\tan^2\theta + 8\tan\theta - 3 = 0 \qquad (6)$$

ومنها نستنتج أن

$$\tan\theta = \frac{1}{3} \quad , \quad \tan\theta = -3. \qquad (7)$$

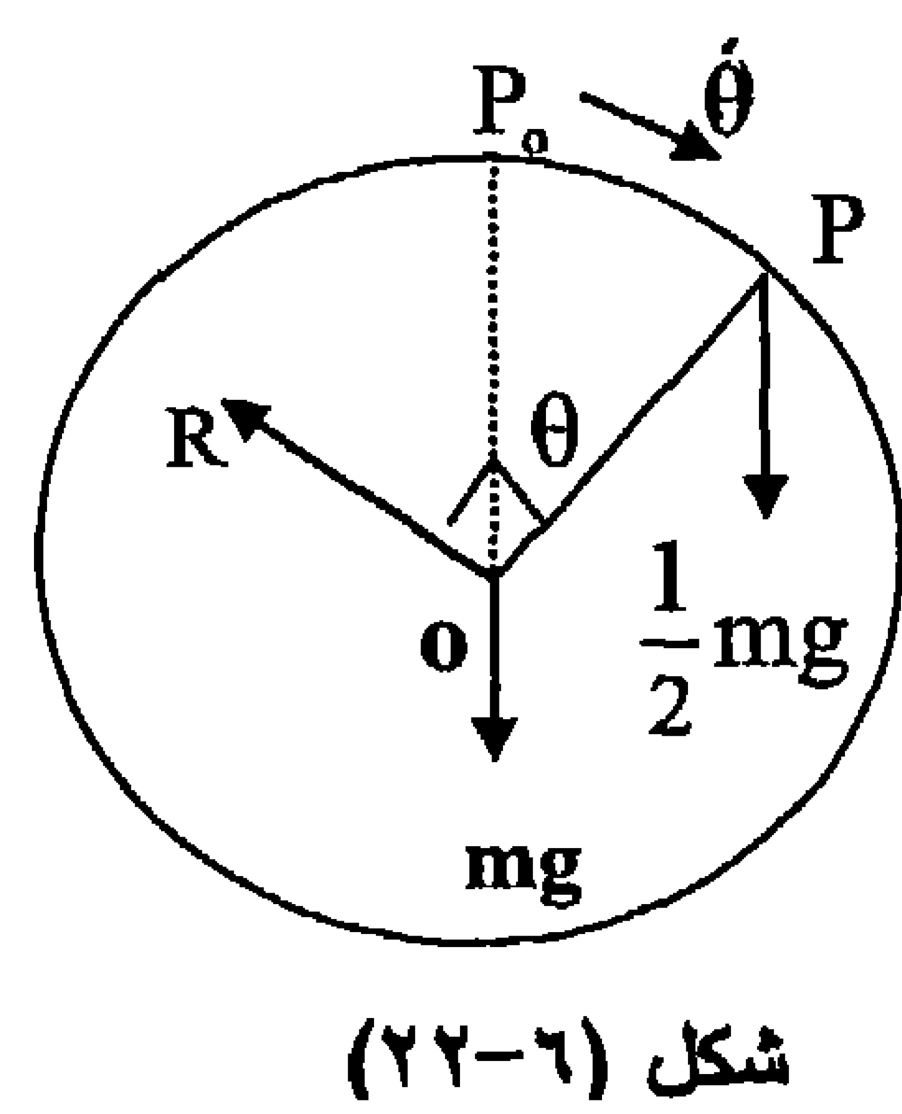
و من (7) يكون المحور الأساسي يميل بزاوية $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

والمحور الآخر يميل بزاوية $\theta = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

مثال (٢): قرص دائري منتظم كتلته m مركزه o يمكن أن يدور بسهوله في مستوى رأسي حول المركز o ، لصق بحافة القرص جسيم صغير كتلته $\frac{1}{2}m$ عند الموضع P . فإذا بدأ القرص في الدوران عندما كان oP رأسياً إلى أعلى. اوجد طاقة حركة المجموعة عندما يصبح oP رأسياً إلى أسفل.

الحل :

باختيار oP_o الرأسي إلى أعلى اتجاها ثابتاً في الفراغ، ونفرض أن P موضع الجسيم الصغير عند اللحظة t حيث $P_o oP = \theta$ فتكون السرعة الزاوية هي $\dot{\theta}$ في الاتجاه المبين في بالشكل (٦-٢٢)



شكل (٦-٢٢)

القوى المؤثرة على المجموعة:

١. mg وزن القرص رأسياً إلى أسفل،

٢. R رد فعل المحور عند o ،

٣. $\frac{1}{2}mg$ وزن الجسيم رأسياً لإلى أسفل عند P

معادلة الحركة الدورانية

$$I_o\ddot{\theta} = M_o \qquad (1)$$

حساب I_o للقرص و الجسيم

$$I_o = \left(\frac{1}{2}ma^2\right)_{disk} + \left(\frac{1}{2}ma^2\right)_{particle} = ma^2 \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

$$ma^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mga\sin\theta \qquad (3)$$

بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (3) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2}g\cos\theta + C_1 \qquad (4)$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الإبتدائية ، عند $t=0$ ، $\theta=0$ كانت $\dot{\theta}=0$ ومن (4) نجد أن $C_1 = \frac{1}{2}g$

وبالتعويض عن الثابت $C_1 = \frac{1}{2}g$ نحصل على

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{a}(g\cos\theta + 1) \qquad (5)$$

وعندما يكون oP رأسياً إلى أسفل تكون $\theta = \pi$ ، من (5) نجد أن

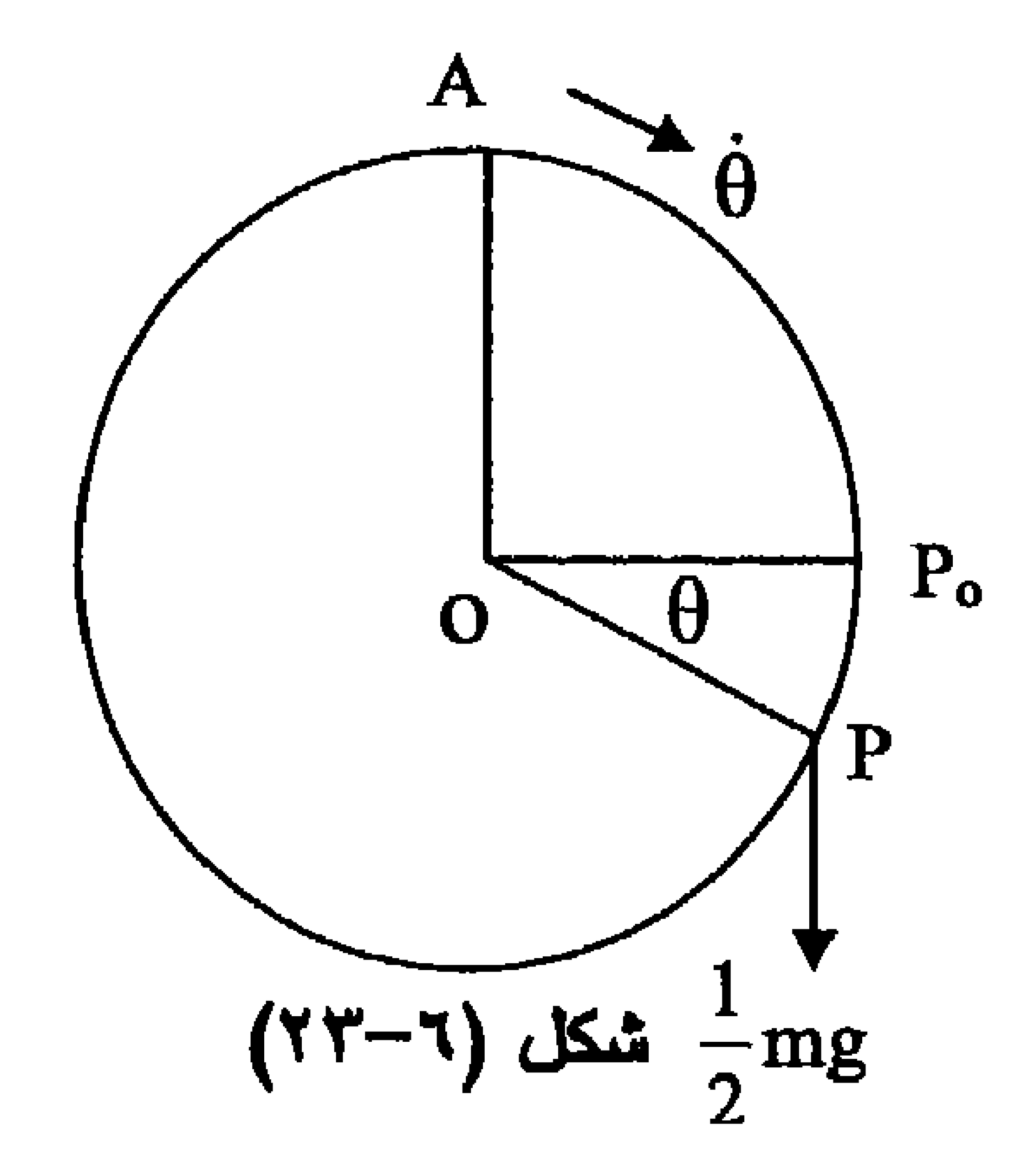
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{a}} \qquad (6)$$

فإن طاقة حركة المجموعة عندما تصبح oP رأسياً إلى أسفل هي

$$E = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta} = \frac{1}{2}(ma^2)\left(\frac{2g}{a}\right) = mga$$

مثال (٣): في المثال السابق، إذا بدأت الحركة عندما كان oP أفقياً وقذف الجسيم رأسياً إلى أسفل بسرعة v_o . اوجد الشرط اللازم لكي تدور المجموعة دورات كاملة.

الحل :



شكل (٦-٢٣)

باعتبار الخط الأفقي oP اتجاها ثابتاً في الفراغ نفرض أن P موضع الجسيم عند اللحظة t حيث $P_o\hat{O}P = \theta$ أنظر الشكل (٦-٢٣) فتكون السرعة الزاوية للقرص هي $\dot{\theta}$ في الاتجاه المبين بالشكل

القوى المؤثرة (التي تعمل على تحريك الجسيم) :

١- $\frac{1}{2}mg$ وزن الجسيم رأسياً إلى أسفل

معادلة الحركة الدورانية هي

$$I_o\ddot{\theta} = M_o \qquad (1)$$

ومنها

$$ma^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mg\,a\cos\theta \qquad (2)$$

بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (2) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

بوضع وفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$a\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta + C \qquad (3)$$

حيث C ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ ، $\theta = 0$ كانت

$\dot{\theta} = \frac{v_o}{a}$ ومن (3) نجد أن $C = \frac{v_o^2}{a}$ وبالتعويض عن الثابت C نجد أن

$$a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta + \frac{v_o^2}{a} \qquad (4)$$

الشرط اللازم لكي تعمل المجموعة دورات كاملة هو أن تكون $\dot{\theta} > 0$ عند الموضع A أي عند $\theta = \frac{3\pi}{2}$ و بالتعويض في (4) نجد أن

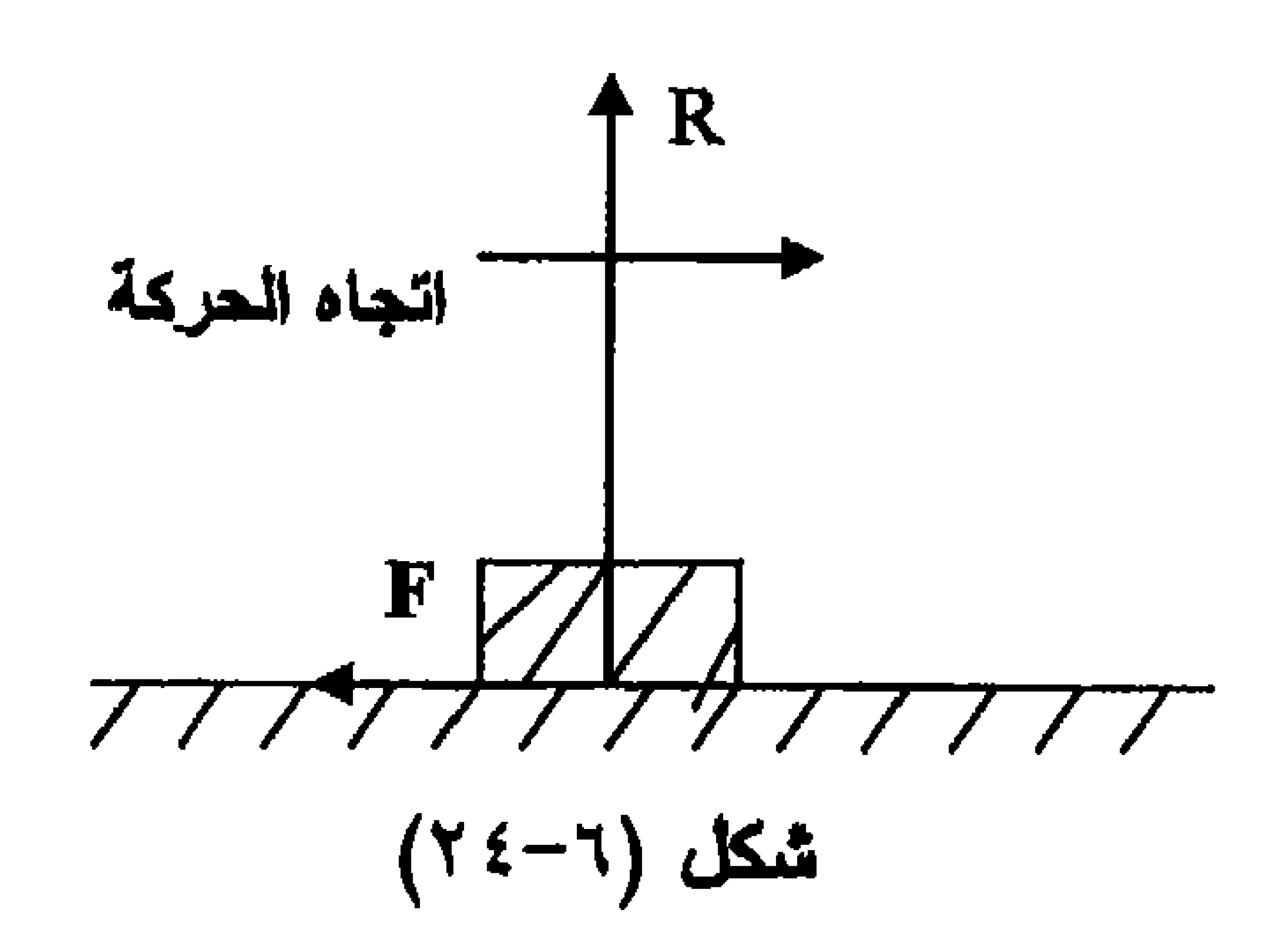
$$v_o > \sqrt{ga} \qquad (5)$$

نستنتج من (5) أن الشرط الضروري لكي تدور المجموعة دورات كاملة هو

$$v_o > \sqrt{ga}$$

٦/١٢– حركة جسم جاسئ (متماسك) على مستوى خشن :

Motion of a rigid body on a friction plane



شكل (٦-٢٤)

إذا تحرك جسم جاسئ على مستوى خشن فإنه يحدث أن تنشأ قوة احتكاك بين الجسم والمستوى بالإضافة إلى رد فعل المستوى على الجسم وباعتبار F ترمز لقوة الاحتكاك، R رد فعل المستوى على الجسم وتكون القيمة النهائية لقوة الاحتكاك F مساوية لحاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد فعل المستوى على الجسم أي أن:

$$F = \mu R \qquad (1)$$

حيث μ يسمى بمعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى. ويوجد حالتان لحركة جسم متماسك على مستوى خشن:

١. إذا وصلت قوة الاحتكاك لقيمتها العظمى يقال أن الجسم ينزلق على المستوى ويكون شرط الانزلاق هو:

$$F = \mu R \qquad (2)$$

٢. إذا لم تصل قوة الاحتكاك لقيمتها العظمى يقال أن الجسم يتدحرج على المستوى ويكون شرط التدحرج هو :

$$F < \mu R \qquad (3)$$

ملحوظة : إذا تحرك الجسم على مستوى خشن يميل بزاوية α على الأفقي تساوي زاوية لاحتكاك فإن

$$\tan\alpha = \mu \qquad (4)$$

٦/١٣- أمثلة :

مثال (١) : قضيب طوله $2a$ وكتلته m يرتكز على مستوى خشن بأحد طرفيه. تَرك القضيب ليتحرك من السكون بحيث كان الطرف المرتكز على المستوى ثابتاً أثناء الحركة. فإذا كان القضيب يدور بزاوية θ مع الرأسي فاثبت أن القضيب يترك المستوى الخشن عندما يصنع زاوية θ حيث $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ، وأن القضيب ينزلق عندما يكون معامل الاحتكاك هو: $\mu = \frac{3\sin\theta(3\cos\theta - 2)}{(1-3\cos\theta)^2}$

الحل:

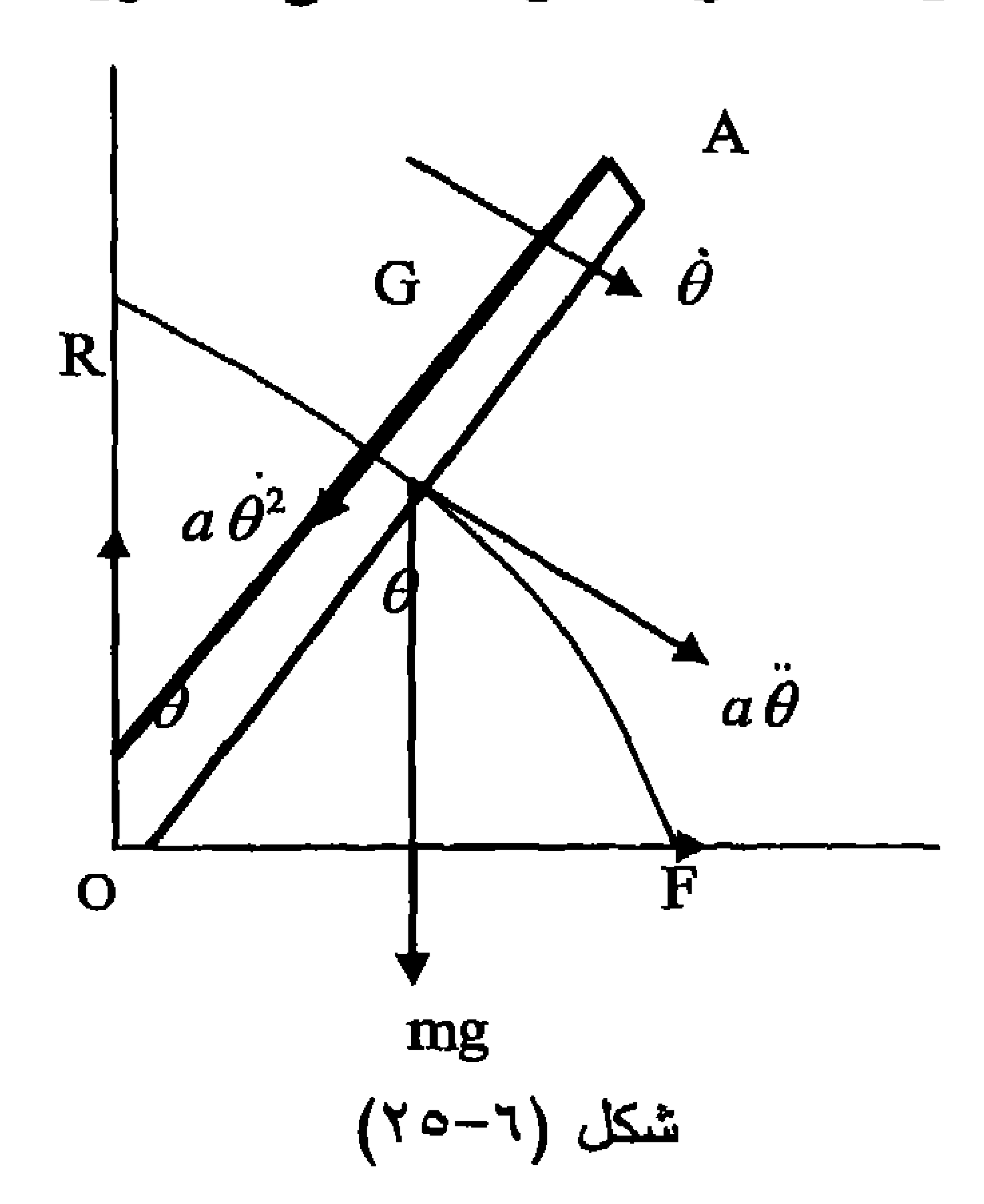
باعتبار القضيب دار زاوية θ مع الرأسي فإن مركز ثقل القضيب G يتحرك في دائرة نصف قطرها a ومركبتا العجلة هما $a\ddot{\theta}$ في اتجاه المماس عند G تزايد θ $a\dot{\theta}^2$ في اتجاه نصف القطر للداخل كما في الشكل (٦-٢٥).

القوى المؤثرة :

١- Rرد الفعل عند o ،

٢- mg الوزن رأسياً إلى أسفل عند G ،

٣- F قوة الاحتكاك عكس اتجاه حركة الطرف o على المستوى.



شكل (٦-٢٥)

معادلات الحركة الانتقالية (معادلات حركة G في دائرة)

من الشكل (٦-٢٥)

$$ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - F\sin\theta - R\cos\theta \qquad (1)$$

$$ma\,\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F\cos\theta - R\sin\theta \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o\ddot{\theta} = M_o\right)$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = mga\sin\theta \qquad (3)$$

بحل المعادلتين (1)، (2) لايجاد F ، R

$(1)\cos\theta + (2)\sin\theta$ نجد أن

$$ma\left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right) = mg - R \qquad (4)$$

أيضا $(2)\cos\theta - (1)\sin\theta$ نحصل على

$$ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = F \qquad (5)$$

بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (3) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}g\cos\theta + C \qquad (6)$$

حيث C ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية يتعن من الشروط الابتدائية عند $t=0$ كانت $\theta=0$ و $\dot{\theta}=0$ نحصل على $C=\frac{3}{4}g$ ، وبالتعويض عن C في (6) نجد أن

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g(1-\cos\theta) \qquad (7)$$

بالتعويض من (3)، (7) في كلا من (4)، (5) نحصل على

$$R = mg - m\left[\frac{3}{2}(1-\cos\theta o\cos\theta + \left(\frac{3}{4}g\sin\theta\right)\sin\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}mg\left[1 + 9\cos^2\theta - 6\cos\theta\right] \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{4}mg(1-3\cos\theta)^2$$

أيضا نجد أن

$$F = m\left[\frac{3}{4}g\sin\theta\cos\theta - \frac{3}{2}g(1-\cos\theta o\sin\theta\right] = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) \qquad (9)$$

يترك القضيب المستوى عندما ينعدم رد الفعل R أي أن عندما $R = 0$ فإن من (8) ومنها نجد أن

$$\frac{1}{4}mg(1-3\cos\theta)^2 = 0 \qquad (10)$$

و من (10) نستنتج أن

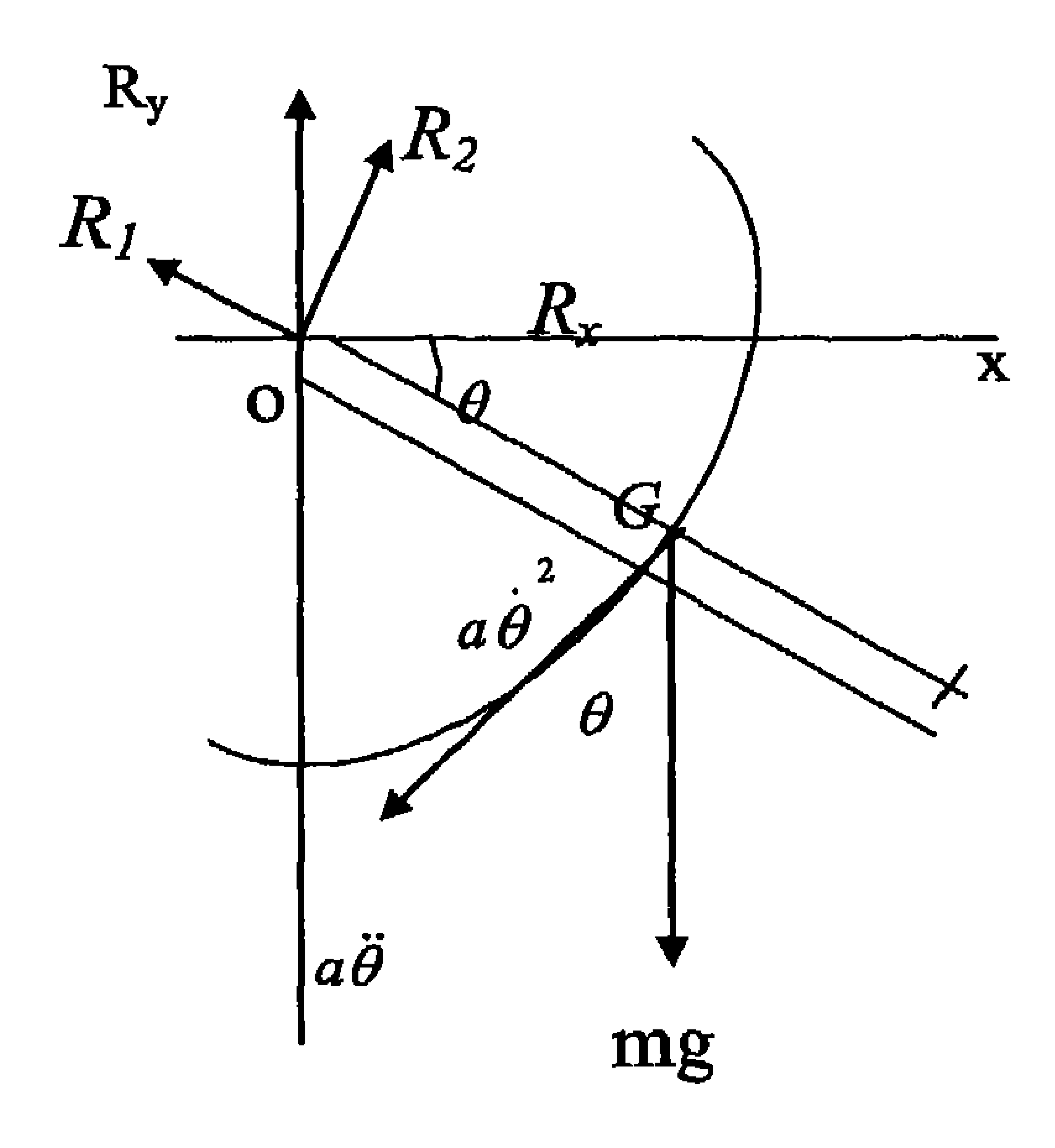
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

وينزلق القضيب عندما يكون $F = \mu R$ ، و من (8) ، (9) نستنتج أن

$$\mu = \frac{3\sin\theta\,(3\cos\theta-2)}{(1-3\cos\theta)^2}$$

مثال (٢): يدور قضيب منتظم كتلته m وطوله 2a في مستوى رأسي حول أحد طرفيه o . فإذا بدأ القضيب الحركة من السكون عندما أفقياً، اثبت أن رد الفعل الأفقي عند نقطة التثبيت يكون أكبر ما يمكن عندما يكون القضيب مائلاً على الأفقي بزاوية $\frac{\pi}{4}$ وأن رد الفعل الرأسي يساوي $\frac{11}{8}mg$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

الحل :



شكل (٦-٢٦)

مركز ثقل القضيب G يتحرك في دائرة مركزها o ،القوي المؤثرة كما في الرسم، R_1 ، R_2 مركبتا رد الفعل عند o في اتجاه القضيب والعمودي عليه كما في الشكل (٦-٢٦).

معادلات الحركة الانتقالية (معادلات حركة مركز الثقل G في دائرة)

معادلة اتجاه نصف القطر

$$ma\dot{\theta}^2 = R_1 - mg\sin\theta \qquad (1)$$

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد θ

$$ma\,\ddot{\theta} = mg\cos\theta - R_2 \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o\ddot{\theta} = M_o\right)$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = mga\cos\theta \qquad (3)$$

بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (3) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}g\sin\theta + C \qquad (4)$$

حيث C ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية يتعن من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ نحصل على $C = 0$ ، و بالتعويض عن C في (4) نجد أن

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g\sin\theta \qquad (5)$$

بالتعويض من (3)، (5) في كلا من (1)، (2) نحصل على R_1 و R_2 على الصورة

$$R_1 = \frac{5}{2}mg\sin\theta \qquad (6)$$

$$R_2 = \frac{1}{4}mg\cos\theta \qquad (7)$$

فإن مركبتي رد الفعل الأفقي R_x و رد الفعل الرأسي R_y هما

$$R_x = R_2\sin\theta - R_1\cos\theta \qquad (8)$$

$$R_y = R_2\cos\theta + R_1\sin\theta \qquad (9)$$

بالتعويض من (6)، (7) في كل من (8)، (9) نجد أن

$$R_x = -\frac{9}{4} mg \sin\theta \cos\theta = -\frac{9}{8} mg \sin 2\theta \tag{10}$$

$$R_y = \frac{1}{4} mg\left(\cos^2\theta + 10\sin^2\theta\right) = \frac{1}{4} mg\left(1 + 9\sin^2\theta\right) \tag{11}$$

من (10) نجد أن R_x تكون أكبر ما يمكن عندما تكون

$$\sin 2\theta = 1 \tag{12}$$

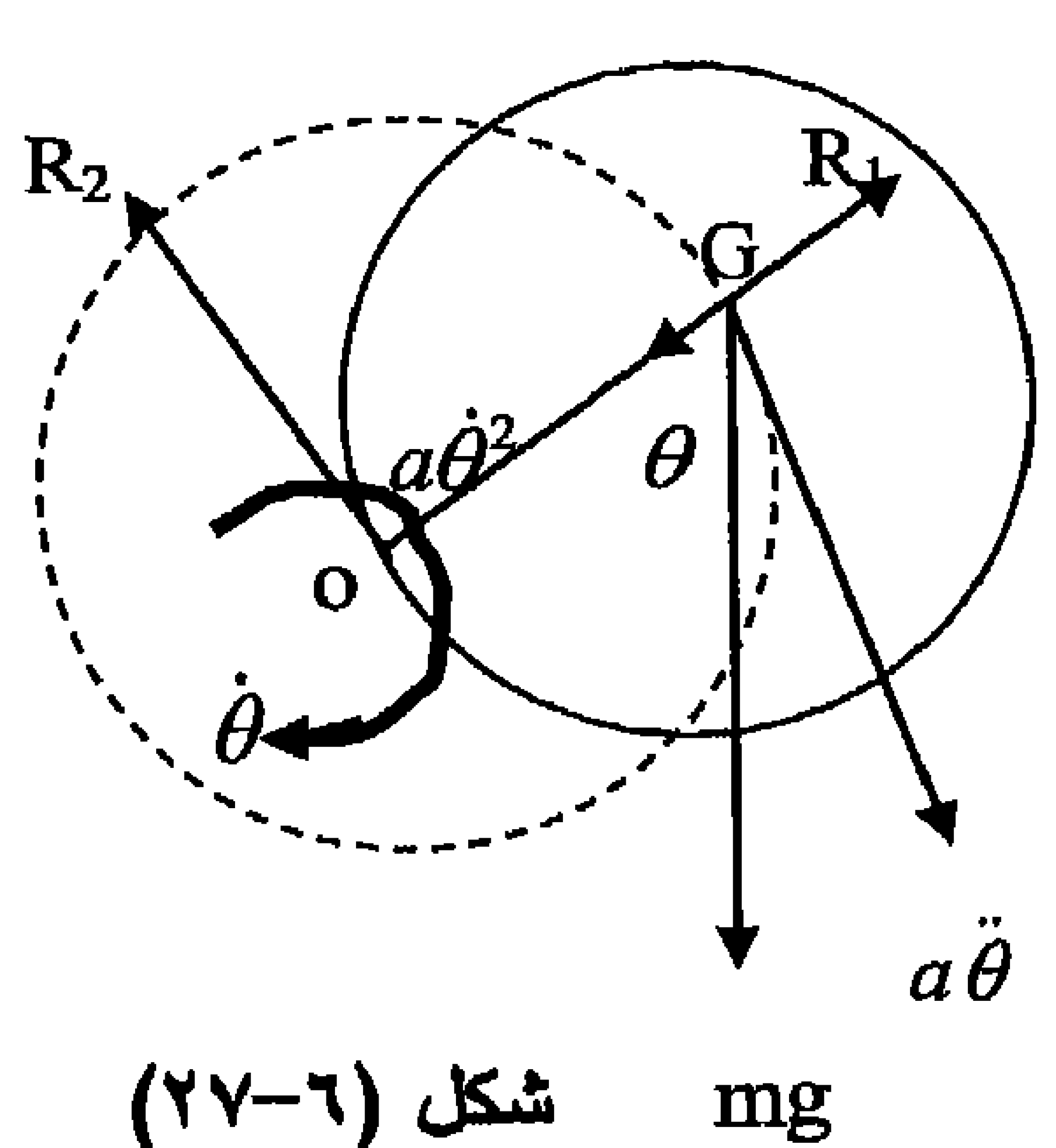
من (12) نجد أن R_x تكون أكبر ما يمكن عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{4}$.

و عندئذ $(\theta = \frac{\pi}{4})$ يكون

$$R_y = \frac{1}{4} mg\left(1 + 9\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right) = \frac{11}{8} mg$$

مثال (٣): قرص دائري يدور حول محور أفقي عمودي على مستوية ومار بنقطة o الواقعة على محيطه. فإذا بدأ القرص حركته من السكون عندما كان القطر المار بنقطة o رأسياً أعلاها. اوجد رد الفعل في اتجاهي نصف القطر المار بنقطة o والعمودي عليه.

الحل:



شكل (٦-٢٧)

نفرض أن θ هي الزاوية التي دارها القرص ويتحرك القرص حول النقطة o، مركز ثقله يتحرك في دائرة نصف قطرها oG. وبفرض رد فعل عند نقطة الارتكاز لها

المركبتان في اتجاه نصف القطر R_1، R_2 في الاتجاه العمودي على نصف القطر كما في الشكل (٦-٢٧)

معادلات الحركة الانتقالية

معادلة اتجاه نصف القطر

$$ma\dot{\theta}^2 = R_1 - mg\sin\theta \qquad (1)$$

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد θ

$$ma\,\ddot{\theta} = mg\cos\theta - R_2 \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o\ddot{\theta} = M_o\right)$

$$\frac{3}{2}ma^2\,\ddot{\theta} = mga\sin\theta \qquad (3)$$

بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (3) وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{2}{3}g\,\cos\theta + C \qquad (4)$$

حيث Cثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية يتعين من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $\theta = 0$و $\dot{\theta} = 0$نحصل على $C = \frac{2}{3}g$، و بالتعويض عن C في (4) نجد أن

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}g\,(1-\cos\theta) \qquad (5)$$

بالتعويض من (3)، (5) في كلا من (1)، (2) نحصل على R_1 و R_2 على الصورة

$$\begin{aligned} R_1 &= mg\cos\theta - \frac{4}{3}(mg1-\cos\theta) \\ &= \frac{1}{3}mg(7\cos\theta - 4) \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{4}mg\sin\theta - \frac{2}{3}mg\sin\theta \\ &= \frac{1}{3}mg\,(7\cos\theta - 4) \end{aligned} \qquad (7)$$

المعادلة (6) تمثل مركبة رد الفعل في اتجاه نصف القطر المار بالنقطة o،بينما المعادلة (7) تمثل مركبة رد الفعل في الاتجاه العمودي على نصف القطر المار بالنقطة o.

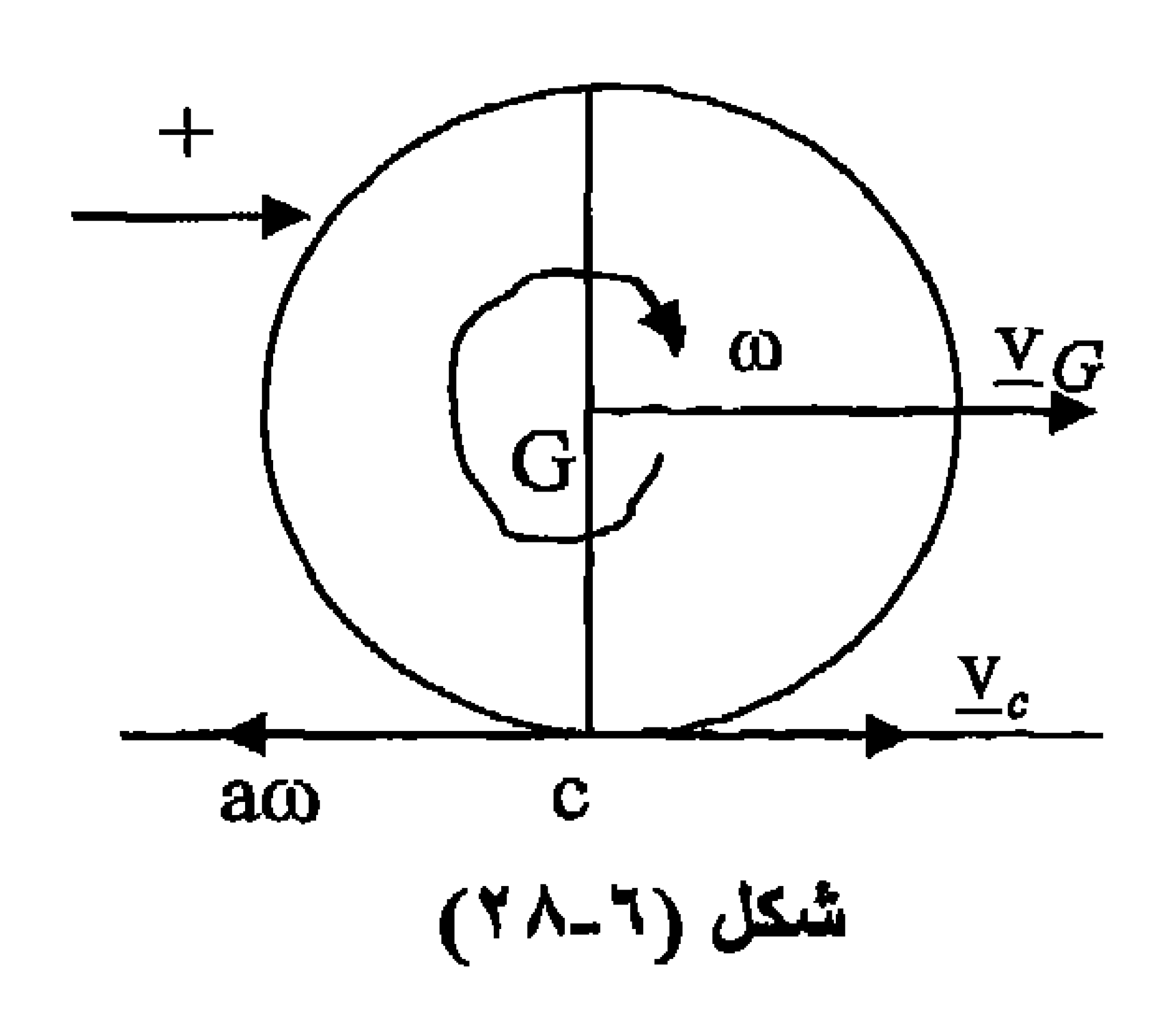
٦/١٤- التدحرج والانزلاق Rolling and Sliding :

عندما يتحرك قرص أو كرة على مستوى أفقي بسرعة زاوية، $\omega = \dot{\theta}$ فتكون سرعة نقطة التماس c بين القرص والمستوى هي

$$\vec{v}_c = \vec{v}_G + \vec{v}_{c \to G} \qquad (1)$$

حيث $\vec{v}_G$ هي سرعة مركز القرص، $v_{c \to G}$ هي سرعة نقطة التماس بالنسبة إلى مركز الثقل و تساوي نصف قطر القرص مضروبة في السرعة الدورانية للقرص و هي عبارة عن سرعة نقطة في دائرة في اتجاه الدوران أنظر الشكل (٦-٢٨) إي أن

$$v_c = v_G - a\omega \qquad (2)$$



شكل (٦-٢٨)

وتوجد حالتان وهما حالة الانزلاق وحالة التدحرج سوف نتناولهما بالتفصيل و شروط حدوثهما .

٦/١٤/١- حالة الانزلاق Sliding case :

يكون فيها الاحتكاك بين الكرة والمستوى قيمة نهائية ويكون لنقطة التماس سرعة نسبية $\vec{v}_{c \to G}$ معينة عند بدء الحركة وتكون شروط الانزلاق هي:

$$F = \mu R \qquad (1)$$

$$\vec{v}_c \neq 0 \qquad (2)$$

أي أن سرعة نقطة التماس اللحظية لا تساوي الصفر في بداية الحركة أنظر الشكل (٦-٢٨)

٦/١٤/٢-: حالة التدحرج Rolling case :

في هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك بين القرص (الكرة) والمستوى يعمل على حفظ نقطة التماس بينهما في حالة سكون لحظي وتكون قوة الاحتكاك أقل من قيمتها النهائية، أي أن شروط التدحرج هي:

$$F < \mu R \qquad (1)$$

$$\vec{v}_c = 0 \qquad (2)$$

أي أن سرعة نقطة التماس اللحظية الصفر في بداية الحركة أنظر الشكل (٦-٢٨)

دراسة الحركة

١. إذا بدأت الحركة انزلاقية فإنها تستمر حتى تنعدم السرعة النسبية لنقطة التماس وفي هذه الحالة تتحول الحركة من انزلاقية إلى تدحرجية أو انزلاقية ولكن عكس الاتجاه السابق.

٢. ولمعرفة الحركة التالية انزلاقية أو تدحرجية نتبع الخطوات التالية.

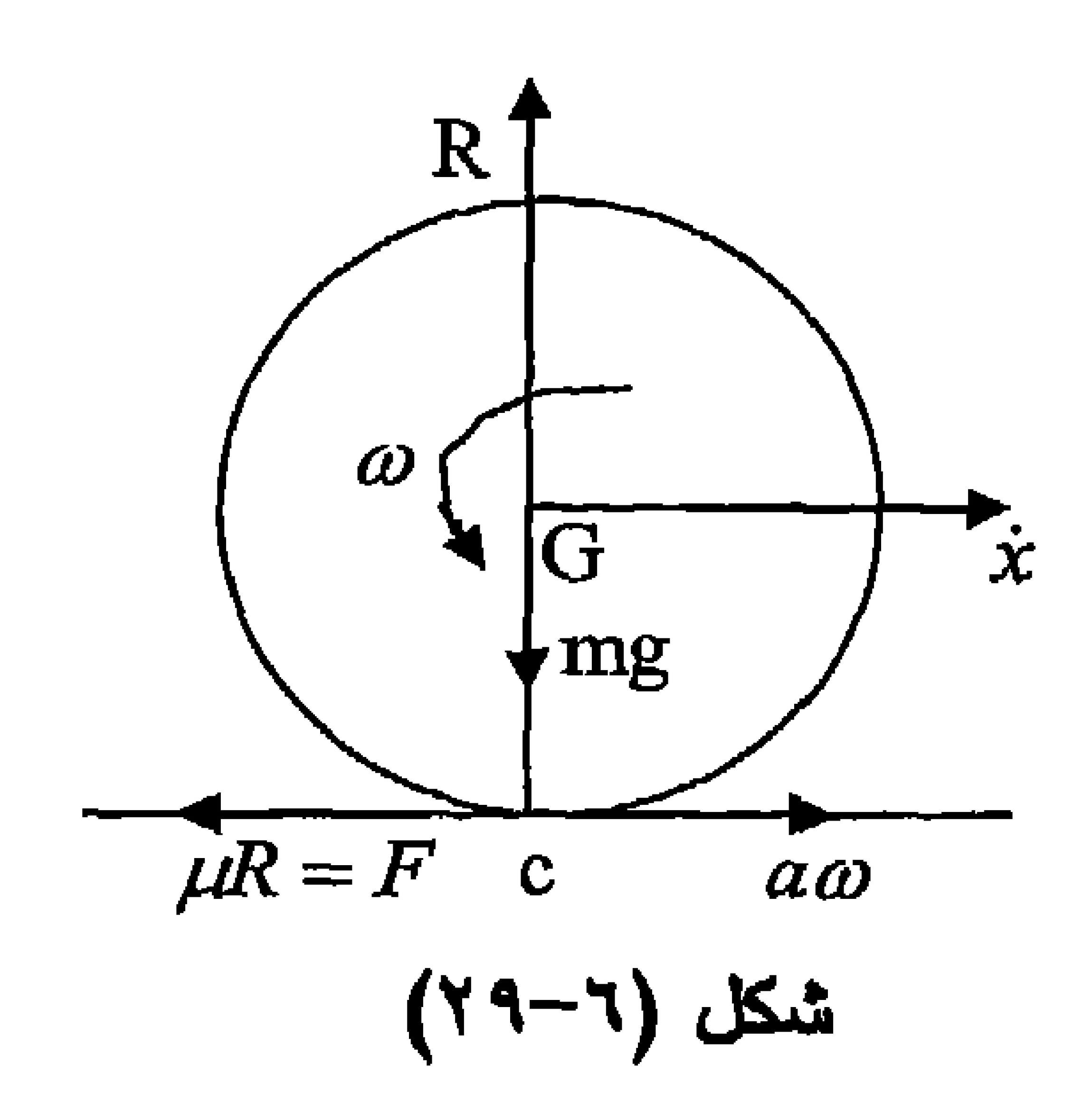
أولاً: نفرض أن الحركة تدحرجية ونكتب شروط التدحرج وهو $\vec{v}_c = 0$ ويحل معادلات الحركة فإذا تحقق أن $F < \mu R$ فإن الفرض بأن الحركة تدحرجية يكون صحيحاً وتستمر الحركة تدحرجية حتى تصبح $F = \mu R$.

ثانياً: نفرض أن الحركة انزلاقية وفي عكس الاتجاه السابق ونكتب $F = \mu R$ في معادلات الحركة ويحل المعادلات فإذا وجدنا أن نقطة التماس لها سرعة نسبية في اتجاه عكس قوة الاحتكاك فإن الفرض بأن الحركة انزلاقية يكون صحيحاً وتستمر الحركة انزلاقية حتى تنعدم سرعة نقطة التماس.

٦/١٥-أمثلة :

مثال (١): قرص دائري يدور حول قطرة وبسرعة زاوية ω في الاتجاه المضاد لعقارب الساعة، وضع على منضدة أفقية خشنة وترك ليتحرك إلى اليمين، فإذا كان معامل الاحتكاك بين القرص والمنضدة هو μ، أثبت أن القرص عند نقطة التماس ينزلق لفترة زمنية تساوي $\frac{a\omega}{3\mu g}$ وبعدها يبدأ من في التدحرج مباشرة بسرعة زاوية مقدارها $\frac{\omega}{3}$ حيث a نصف قطر القرص.

الحل :



شكل (٦-٢٩)

القوى المؤثرة على القرص

١. Rرد فعل المستوى على القرص عند c،
٢. mg وزن القرص رأسياً إلى أسفل،
٣. F قوة الاحتكاك، أنظر الشكل (٦-٢٩)

الحركة انزلاقية فإن (تبدأ بانزلاق)

أ- $F = \mu R$

ب- $v_c \neq 0$ حيث

$$v_c = v_G + v_{c \to G} = \dot{x} + a\omega \qquad (1)$$

معادلات الحركة الانتقالية

$$m\ddot{x} = -F = -\mu R \qquad (2)$$

(3) $$R = mg$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o \ddot{\theta} = M_o\right)$

(4) $$\frac{1}{2} m a^2 \ddot{\theta} = -\mu R a$$

بالتعويض من (3) في (4) نجد أن

(5) $$\ddot{\theta} = -\frac{2\mu}{a} g$$

من (3) في (2) نجد أن

(6) $$\ddot{x} = -\mu g$$

بتكامل (6) نجد أن

(7) $$\dot{x} = -\mu g t + C_1$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $\dot{x} = 0$ نحصل على $C_1 = 0$، و بالتعويض عن C_1 في (7) نحصل على

(8) $$\dot{x} = -\mu g t$$

أيضاً بتكامل (5) بالنسبة للزمن نجد أن

(9) $$\dot{\theta} = -\frac{2\mu}{a} g t + C_2$$

حيث C_2 ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $\dot{\theta} = \omega$ نحصل على $C_2 = 0$، و بالتعويض عن C_2 في (10) نحصل على

(10) $$\dot{\theta} = -\frac{2\mu}{a} g t + \omega$$

لايجاد الزمن t الذي ينزلق القرص فيه ثم يبدأ التدحرج عندئذ تكون $v_c = 0$ أي أن

(11) $$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$$

بالتعويض من (8) و (10) عن في (11) نجد أن

(12) $$-\mu g t + a\left(-\frac{2\mu}{a} g t + \omega\right) = 0$$

بحل المعادلة الأخيرة في t نحصل على

$$t = \frac{a\omega}{3\mu g} \qquad (13)$$

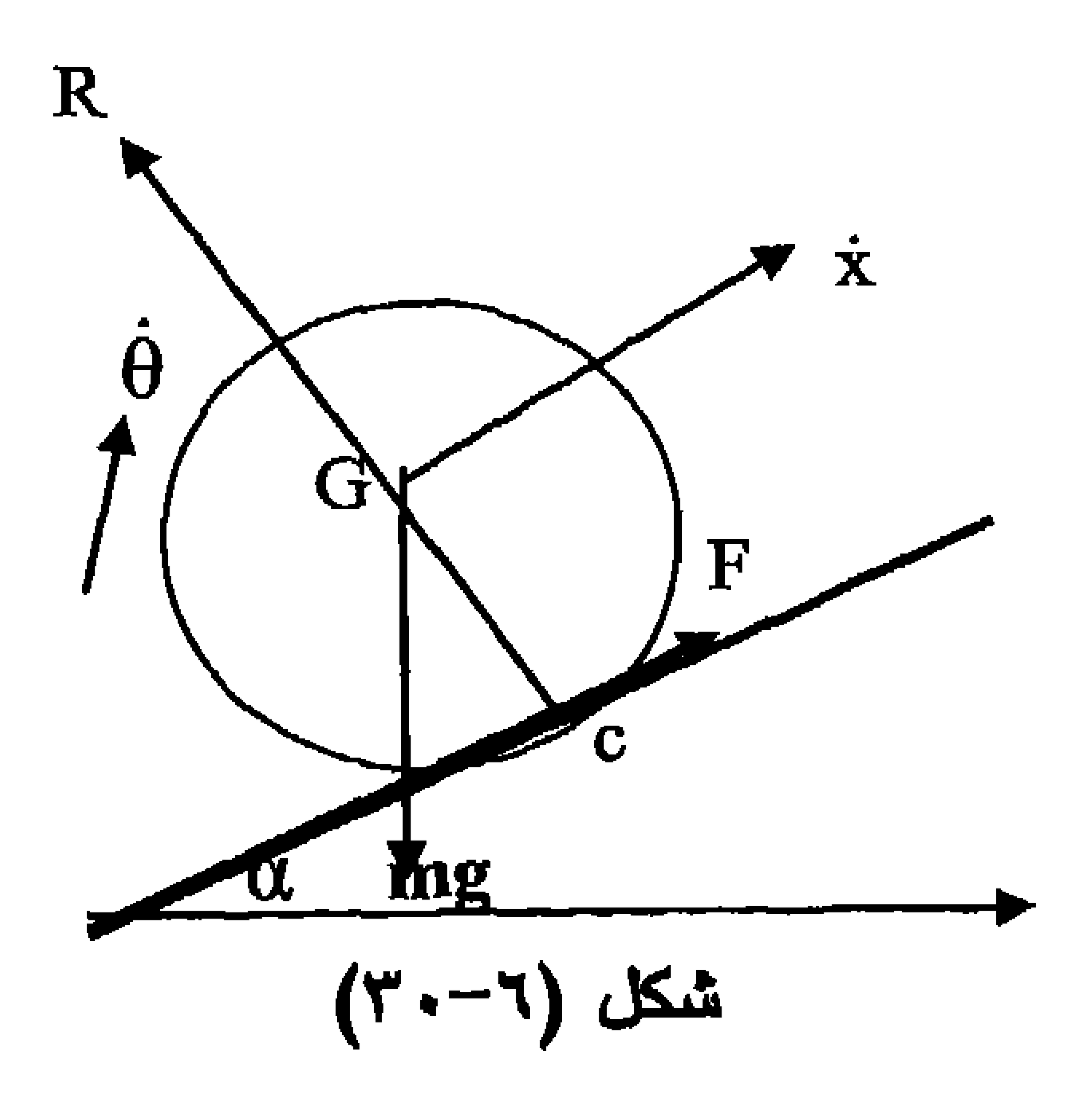
ولإيجاد السرعة الزاوية التي يبدأ بها القرص التدحرج نعوض عن t من المعادلة (13) في المعادلة (10) نحصل على

$$\dot{\theta} = -\frac{2\mu}{a} g\left(\frac{a\omega}{3\mu g}\right) + \omega = \frac{\omega}{3} \qquad (14)$$

نستنتج من (14) أن القرص يبدأ في التدحرج بالسرعة الزاوية $\dot{\theta} = \frac{\omega}{3}$.

مثال (٢): قذفت كرة منتظمة نصف قطرها a إلى أعلى فوق مستوى مائل خشن يميل بزاوية α على الأفقي بسرعة ابتدائية v وبسرعة زاوية ω في اتجاه إلى أعلى، فإذا كانت $v < a\omega$ وكان معامل الاحتكاك يساوي $\mu = \tan\alpha$ فاثبت أن مركز الكرة لا تكون له عجلة لمدة من الزمن مقدارها $\frac{2(a\omega - v)}{5g\sin\alpha}$، وإذا كانت $v > a\omega$ فاكتب معادلات الحركة في هذه الحالة، اثبت أن سرعة نقطة التماس تتلاشى بعد زمن قدره $\frac{2(v - a\omega v)}{5g\sin\alpha}$.

الحل :



شكل (٦-٣٠)

القوى المؤثرة أنظر الشكل (٦-٣٠)، اختبار نقطة التماس عند بداية الحركة حيث

$$v_c = v_G + v_{c \to G} = v - a\omega \qquad (1)$$

حيث أن $v < a\omega$ نستنتج من (1) أن سرعة نقطة التماس لها سرعة و اتجاها الي أسفل لأنها سالبة لذلك فإن الحركة تبدأ بانزلاق و تكون قوة الاحتكاك إلى أعلى كما في الرسم و تكون

$$F = \mu R \qquad (2)$$

معادلات الحركة الانتقالية (في اتجاه المستوى والعمودي عليه)

$$m\ddot{x} = \mu R - mg\sin\alpha \qquad (3)$$

$$R = mg\cos\alpha \qquad (4)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o\ddot{\theta} = M_o\right)$

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = -\mu R a \qquad (5)$$

الإشارة سالبة لأن μR عكس الدوران و أيضا

$$\mu = \tan\alpha \qquad (6)$$

بالتعويض من (4)، (6) في المعادلة (5) نجد أن

$$\ddot{\theta} = -\frac{5}{2a}g\sin\alpha \qquad (7)$$

وبالتعويض من (4)، (6) في (3) نحصل على

$$\ddot{x} = 0 \qquad (8)$$

نستنتج من المعادلات (8) أن عجلة مركز الثقل للكرة تنعدم أي أن الكرة تتحرك بسرعة منتظمة v إلى أن تغير قوة الاحتكاك مقدارها أو اتجاهها، وهذا يعني أن الحركة إما تصبح تدحرجية $F < \mu R$ أو تصبح انزلاقية في عكس الاتجاه السابق. وعندئذ تتلاشى سرعة نقطة التماس $v_c = 0$ و منها نجد

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \qquad (9)$$

بتكامل (9) نحصل على

$$\dot{x} = C \qquad (10)$$

حيث C ثابت يتعين من الشروط الابتدائية يتعين من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $\dot{x} = v$ نحصل على $C = v$، و بالتعويض عن C في (10) نحصل على

$$\dot{x} = v \tag{11}$$

وبتكامل (7) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{\theta} = \left(-\frac{5}{2a} g \sin\alpha\right) t + C_1 \tag{12}$$

حيث C_1 ثابت التكامل يمكن الحصول عليه من الشروط الابتدائية يتعين من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ كانت $\omega = \dot{\theta}$ نحصل على $C_1 = v$ ، و بالتعويض عن C_1 في (12) نحصل على

$$\dot{\theta} = \left(-\frac{5}{2a} g \sin\alpha\right) t + \omega \tag{13}$$

بالتعويض من (11) و (13) في (9) نجد أن

وبحل المعادلة في t نجد أن

$$t = \frac{2(a\omega - v)}{5 g \sin\alpha} \tag{14}$$

نستنتج من (14) أن مركز لا تكون له عجلة لمدة من الزمن مقدارها

$$\frac{2(a\omega - v)}{5 g \sin\alpha}$$

وإذا كانت $v > a\omega$ فإن من (1) v_c تكون موجبة

وفي هذه الحالة تكون لنقطة التماس سرعة ولكن لأعلى وتكون الحركة أيضاً انزلاقية وتكون قوة الاحتكاك $F = \mu R$ اتجاهها أسفل عكس الحالة الأولى. ويكون الرسم كما سبق ولكن نعكس $F = \mu R$ اتجاهها إلى أسفل

معادلات الحركة الانتقالية

$$m\ddot{x} = -\mu R - mg\sin\alpha \tag{15}$$

$$R = mg\cos\alpha \tag{16}$$

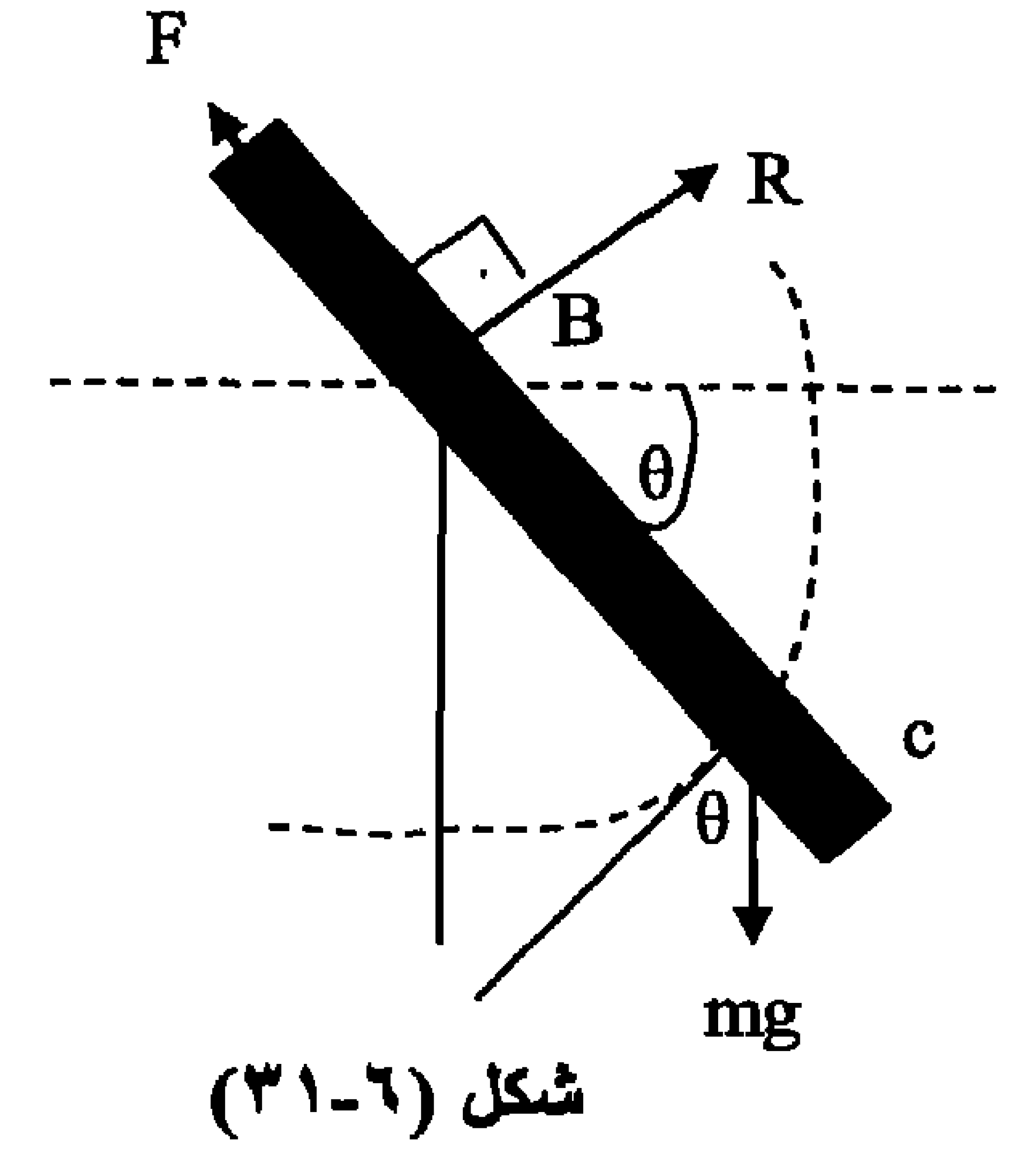
معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o \ddot{\theta} = M_o\right)$

$$\frac{2}{5} ma^2 \ddot{\theta} = \mu R a \tag{17}$$

وبنفس الطريقة بحل المعادلات لإيجاد $\dot{x}, \dot{\theta}$ وبتلاشي سرعة نقطة التماس بعد زمن قدره t حيث $\dot{x} = a\dot{\theta}$ نحصل على الزمن المطلوب (تمرين).

مثال (٣): قضيب منتظم طوله $2a$ وضع عموديا على حافة نضد بحيث كان مركز ثقله خارج النضد وعلى بعد $\frac{1}{2}a$ من حافته. اوجد متى ينزلق القضيب على حافة النضد.

الحل :



شكل (٦-٣١)

باعتبار نقطة التماس B قطباً ويكون موضع c مركز ثقل القضيب $\left(\frac{1}{2}a , \theta\right)$ عند اللحظة t ويتحرك مركز الثقل c في دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}a$ كما في الشكل (٦-٣١)

القوى المؤثرة:على القضيب هي:

١. Rرد فعل المستوى على القرص عند c،
٢. mg وزن القرص رأسياً إلى أسفل،
٣. F قوة الاحتكاك، و اتجاهاأنظر الشكل (٦-٣١)

معادلات الحركة الانتقالية:

معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر

$$m\left(\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2\right)=F-mg\sin\theta \qquad (1)$$

معادلة الحركة في اتجاه المماس تزايد θ

$$m\left(\frac{1}{2}a\ \ddot{\theta}\right)=mg\cos\theta-R \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_B\ddot{\theta}=M_B\right)$

$$I_B\ddot{\theta}=mg\left(\frac{1}{2}a\cos\theta\right) \qquad (3)$$

ولكن باستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد أن

$$I_B=I_c+m\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{3}ma^2+\frac{1}{4}ma^2=\frac{7}{12}ma^2 \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3) تكون معادلة الحركة الدورانية هي

$$a\ddot{\theta}=\frac{6}{7}g\cos\theta \qquad (5)$$

والمعادلات من (2) و (1) و (5) كافية لتعيين المجاهيل F, R, θ و بوضع $\ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (5) و بفصل المتغيرات و التكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2=\frac{6}{7}g\sin\theta+C \qquad (6)$$

حيث C ثابت يتعين من الشروط الابتدائية عند $t=0$ كانت $\theta=0$ ، $\dot{\theta}=0$ نحصل على $C=0$ ، و بالتعويض عن C في (6) نحصل على

$$a\dot{\theta}^2=\frac{12}{7}g\sin\theta \qquad (7)$$

و بالتعويض من (6) و (7) في (1) و (2) نجد أن

$$F=\frac{13}{7}mg\sin\theta \qquad (8)$$

$$R=\frac{4}{7}mg\cos\theta \qquad (9)$$

يبدأ الانزلاق عندما

$$F=\mu R \qquad (10)$$

وبالتعويض من (8)، (9) في (10) نحصل على

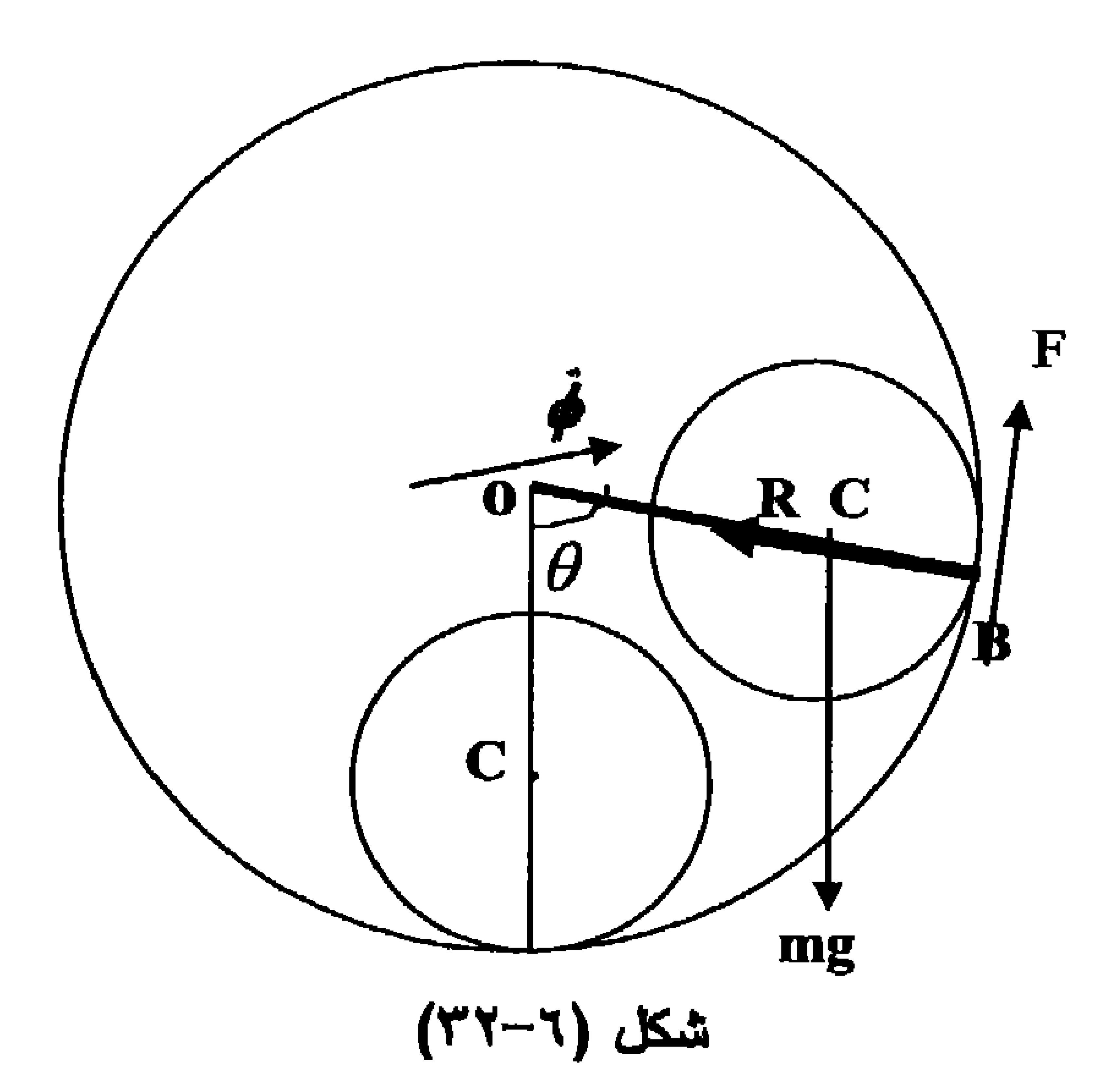
$$\tan\theta = \frac{3}{4}\mu \qquad (11)$$

نستنتج أن القضيب ينزلق عندما تكون زاوية ميله على الأفقي

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\mu\right)$$

مثال (٤): اسطوانة مصمتة منتظمة قطرها a وضعت بداخل أنبوبة دائرية نصف قطرها $a+b$ مثبتة بحيث يكون محورها أفقياً فإذا وضعت الاسطوانة ملامسه لأسفل راسم في الأنبوبة وأعطيت سرعة زاوية $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4}{3}bg}$ حول محورها وبدأت الحركة دحرجة بحتة. فاثبت أن الانزلاق يبدأ عندما يكون البعد الرأسي لمحور الاسطوانة أسفل محور الأنبوبة $\frac{b}{\sqrt{1+49\mu^2}}$ ، حيث μ معامل الاحتكاك بين الاسطوانة والأنبوبة.

الحل :



شكل (٦-٣٢)

بفرض أن الإحداثيات القطبية لمركز ثقل لاسطوانة C عند t هو $(b,\theta)=(r,\theta)$ يتحرك في دائرة نصف قطرها b.،

القوى المؤثرة :

١. R رد فعل الانبوبة في اتجاه $\overline{Bo}$،

٢. mg وزن الأسطوانه رأسياً إلى أسفل،

٣. F قوة الاحتكاك،في اتجاه المماس المشترك ا (عند B) إلى أعلى كما في الشكل .

معادلات الحركة الانتقالية (حركة مركز الثقل) :

$$m\left(b\dot{\theta}^2\right) = R - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m\left(b\,\ddot{\theta}\right) = F - mg\sin\theta \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_c\ddot{\theta} = M_c\right)$

لنفرض أن السرعة الزاوية للاسطوانة حول محورها عند اللحظة t هي $\dot{\varphi}$ كما هو مبين بالشكل (٦-٣٢)

$$\frac{1}{2}ma^2\,\ddot{\varphi} = -Fa \qquad (3)$$

هذه المعادلات الثلاث لا تكفي لتعيين المجاهيل (F, R, φ, θ) والمعادلة الرابعة هي شرط الحركة التدحرجية وهو

سرعة نقطة التماس B كجزء من الاسطوانة = سرعتها كجزء من الأنبوبة

سرعة B كجزء من الاسطوانة هي

$$v_B = v_c + v_{B\to c} \qquad (4)$$

أي أن

$$v_B = b\dot{\theta} + \left(-a\dot{\varphi}\right) \qquad (5)$$

حيث الأنبوبة ثابتة فإن سرعة النقطة B كجزء من الأنبوبة تساوي صفر أي أن $v_B = 0$ و بالتعويض (5) نستنتج

$$b\dot{\theta} = a\dot{\varphi} \qquad (6)$$

بالتعويض من (3)، (6) في (2) نجد أن

$$b\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}g\sin\theta \qquad (7)$$

و بوضع $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (7) وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}b\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}g\cos\theta + C \qquad (8)$$

حيث C ثابت التكامل يمكن الحصول عليه من الشروط الابتدائية يتعين من الشروط

الابتدائية عند $t=0$ كانت $\dot{\phi}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4}{3}bg}$ ، $\dot{\theta}=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{4}{3}bg}$ نحصل على $C=0$ ، و بالتعويض عن C في (8) نجد أن

$$b\dot{\theta}^2=\frac{4}{3}g\cos\theta \tag{9}$$

وبالتعويض من (9) في (1) وأيضاً من (7) في (2) نحصل على

$$R=\frac{7}{3}mg\cos\theta \tag{10}$$

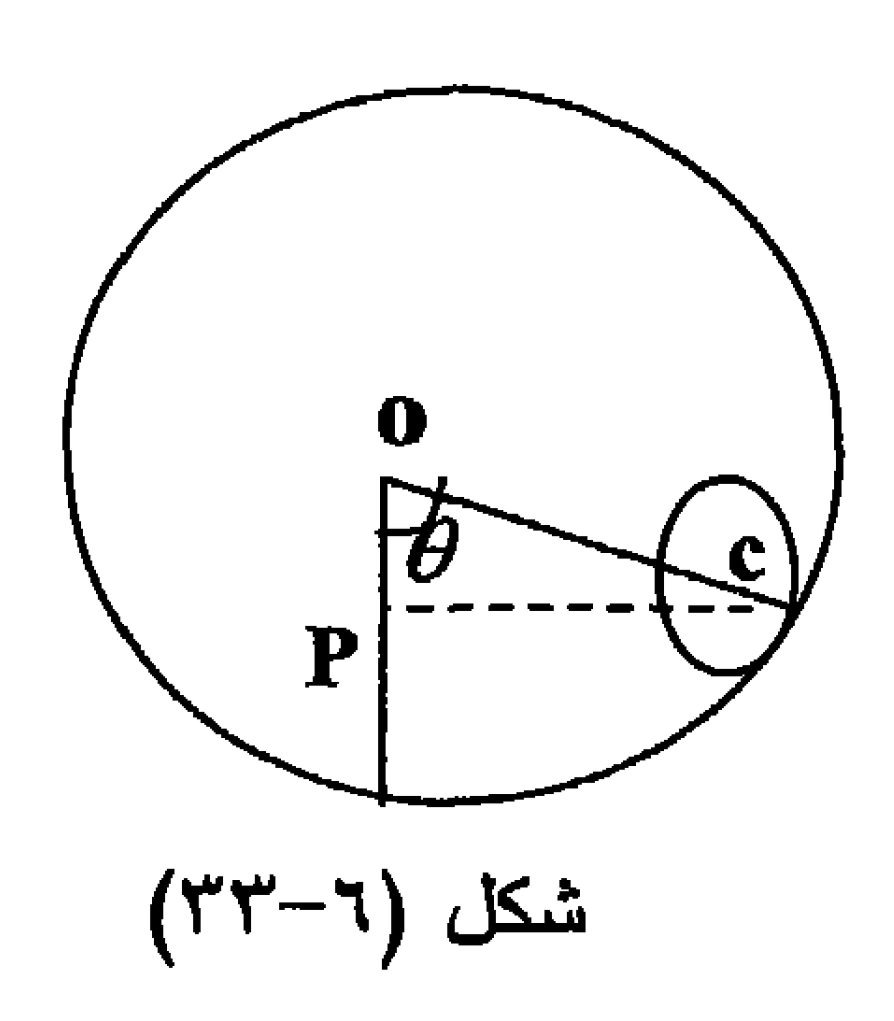
$$F=\frac{1}{3}mg\sin\theta \tag{11}$$

يبدأ الانزلاق عندما

$$F=\mu R \tag{12}$$

وبالتعويض من (10)، (11) في (12) نحصل على

$$\tan\theta=7\mu \tag{13}$$



شكل (٦-٣٣)

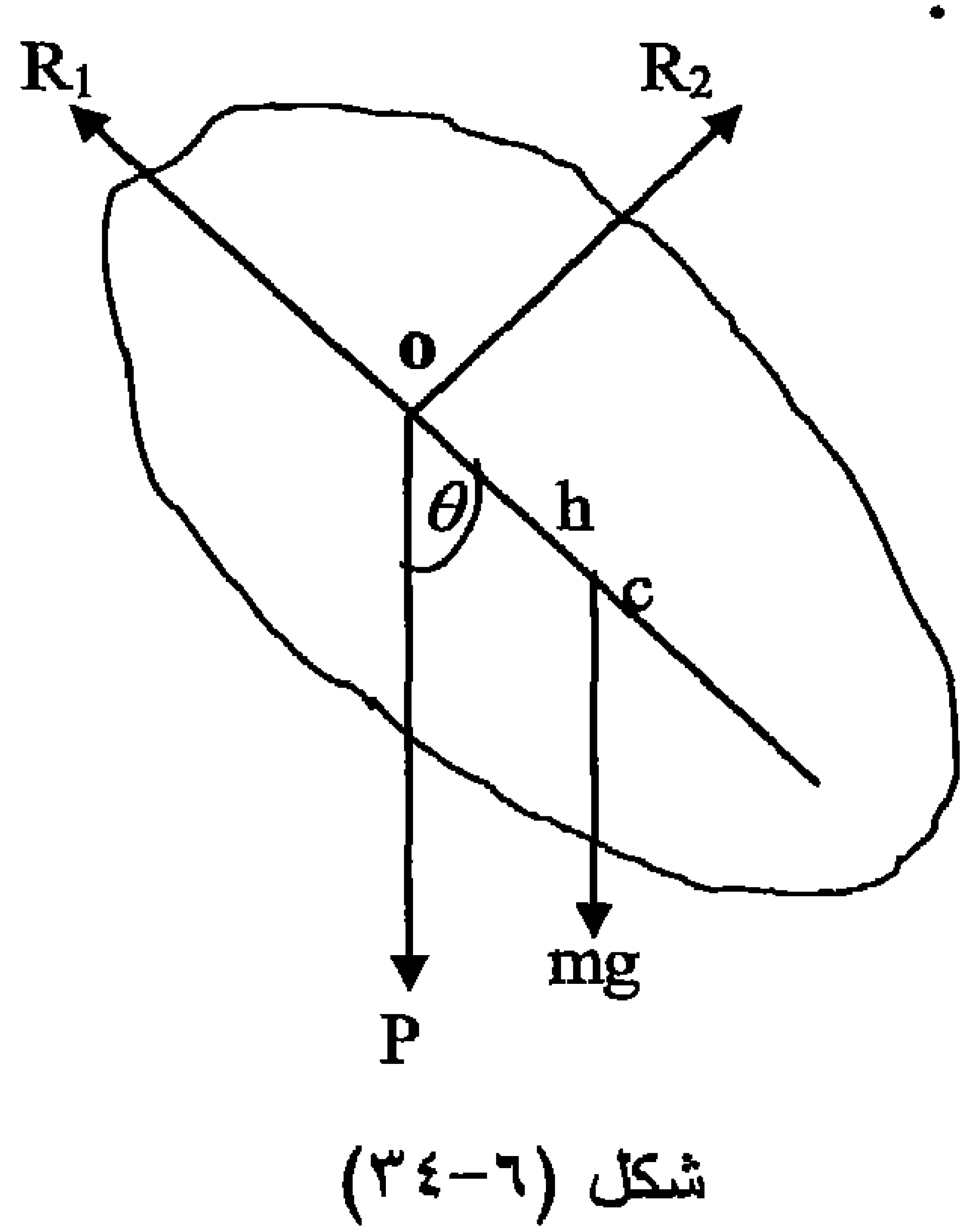
عندئذ يكون محور الاسطوانة على بعد رأسي أسفل محور الأنبوبية oP أنظر الشكل (٦-٣٣) حيث $oP=b\cos\theta$ و من (13) نجد أن

$$oP=\frac{b}{\sqrt{1+49\mu^2}}$$

٦/١٦- البندول المركب Compound Pendulum :

تعريف: إذا دار جسم جاسيء حول محور أفقي ثابت فإنه يكون ما يسمى بالبندول المركب .

تعيين موضع مركز الثقل :



شكل (٦-٣٤)

نرسم المقطع المار بمركز ثقل الجسم c عمودياً على محور الدوران ولنفرض أنه يقابله في o. باختيار الرأسي إلى أسفل عند o خطاً ثابتاً في الجسم ولنفرض $c\hat{o}P=\theta$. نعين موضع الجسم عند اللحظة t باستخدام الإحداثيات القطبية حيث o قطب. لنفرض أن موضع مركز الثقل عند اللحظة t هو $c\equiv(h,\theta)$ حيث $oc=h$، أنظر الشكل (٦-٣٤).

القوى المؤثرة على الجسم :

١. R_1, R_2 مركبتا رد الفعل عند o ، أنظر الشكل (٣-٣٤)

٢. mg وزن البندول رأسياً إلى أسفل عند c.

معادلات الحركة الخطية (حركة مركز الثقل) :

$$m\left(h\dot{\theta}^2\right)=R_1-mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m(h\,\ddot{\theta})=R_2-mg\sin\theta \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية $\left(I_o\ddot{\theta}=M_o\right)$

$$mr_o^2\,\ddot{\theta}=-mg\sin\theta\,(h) \qquad (3)$$

هذه المعادلات الثلاث تكفي لتعيين المجاهيل الثلاث $\left(\theta,\ R_1\ ,R_2\right)$

أولاً: الذبذبات الصغيرة :

إذا كانت حركة البندول قاصرة فقط على إحداث ذبذبات صغيرة، أي أن الزاوية θ تكون صغيرة بدرجة يمكن معها اعتبار

(4)

$$\sin\theta\approx\theta$$

بالتعويض من (3) في (4) نستنتج أن

$$\ddot{\theta}=-\frac{gh}{r_o^2}\theta \qquad (5)$$

و المعادلة (5) تمثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r_o^2}{gh}} \qquad (6)$$

ولكن الزمن الدوري لبندول بسيط طول خيطه L هو

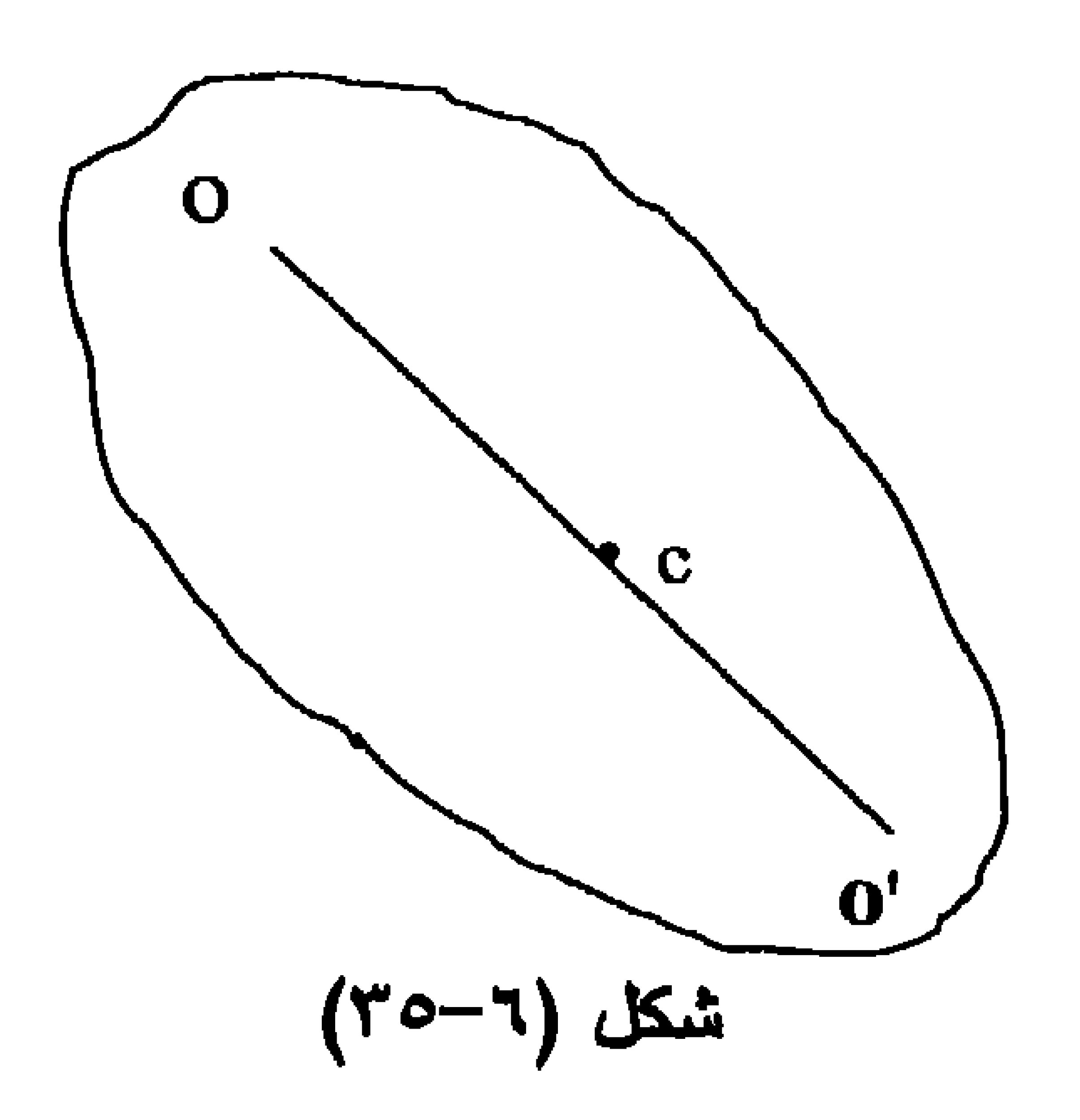
$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (7)$$

وإذا كان الزمن الدوري لكل من البندول المركب والبندول البسيط واحداً. وبمقارنة (6)، (7) نجد أن

$$L=\frac{r_o^2}{h} \qquad (8)$$

و باستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد أن

$$I_o=I_c+mh^2 \qquad (9)$$



شكل (٦-٣٥)

ومن (8) نستنتج أن

$$mr_o^2 = mr_c^2 + mh^2$$

أي أن

$$r_o^2 = r_c^2 + h^2 \tag{10}$$

وبالتعويض من (10) في (8) نجد أن

$$L = h + \frac{r_c^2}{h} \tag{11}$$

يسمى الطول L المعطى في (11) بطول البندول البسيط المكافئ، فإذا أخذنا النقطة o' على امتداد oc بحيث

$$oo' = L \, , \, co' = \frac{r_c^2}{h} \tag{12}$$

فإن النقطة c' تسمى "بمركز الذبذبة" وتسمى النقطة o بمركز التعليق، لاحظ أن o'، o متبادلتان أي إذا علق البندول من النقطة o' كانت o مركز الذبذبة وذلك لأن

$$oc \times co' = \frac{h \times r_c^2}{h} = r_c^2 = \text{const.}$$

لاحظ من (11) أن L تكون نهاية صغرى عندما $L = \pm r_c$.

ثانياً: تعيين رد فعل المحور :

و بوضع $\ddot{\theta}=\dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ في (7) وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2=-\frac{gh}{r_o^2}g\cos\theta+\text{const.} \qquad (13)$$

حيث الثابت يعين من الشروط الابتدائية للمسألة. وبالتعويض من (13) في (1) يمكن الحصول على المركبة R_1 ، وبالتعويض من (3) في (2) يمكن الحصول على R_2 و يكون رد الفعل للمحور هو

$$R=\sqrt{R_1^2+R_2^2}$$

واتجاهه يصنع زاوية α مع R_1 حيث $\tan\alpha=\dfrac{R_2}{R_1}$ ،

فمثلاً $\ddot{\theta}=-\dfrac{7g}{12}\theta$ فإن طول البندول البسيط يكون $\dfrac{12}{7}L$.

٦/١٧- تمارين :

١. اوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة مستطيلة ضلعاها a ، b حول محور عمودي على الصفيحة ويمر بأحد رؤوسها.

٢. اوجد عزم القصور الذاتي لمتوازي مستطيلات منتظم كتلته m وأضلاعه $2a$ ، $2b$ حول محاور مارة بمركزه وموازية لأضلاعه.

٣. صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها m على شكل مثلثين متساويي الساقين ارتفاعيهما a ، b وفي جهتين مختلفتين من قاعدة مشتركة طولها $2c$. اثبت أن عزم القصور الذاتي حول محور مار بمنتصف القاعدة المشتركة وعمودي على مستوى الصفيحة يساوي $\frac{m}{6}\left(a^2+b^2+c^2-ab\right)$.

٤. اوجد عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم ناقص متوازي القاعدتين حول محوره ثم حول قطر في قاعدته الكبرى.

٥. اوجد معادلة قطع ناقص القصور لنصف كرة منتظمة جوفاء عند نقطة o على حافة قاعدتها الدائري. برهن أن أحد المحاور الأساسية يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ من مستوى القاعدة.

٦. أثبت أن معادلة قطع ناقص القصور عند مركز قرص على شكل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b^2}\right)=\text{const.}$.

٧. أوجد معادلة قطع ناقص القصور لمخروط دائري قائم مصمت منتظم ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a عند نقطة o على محيط القاعدة. عين اتجاهات المحاور الأساسية عند o وبرهن أنه إذا كانت الزاوية الرأسية للمخروط تساوي $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ فإن أحدهما يمر بمركز ثقل المخروط.

٨. اسطوانة مصمتة نصف قطرها a ، موضوعة على مستوى أفقي خشن معامل احتكاكه μ . أثر على الاسطوانة دفعاً جعل محورها يتحرك بسرعة v وجعلها تدور حول محورها بسرعة زاوية ω في الاتجاه الذي يكسب نقطة التماس سرعة في

اتجاه عكس v ، فإذا كانت $v > a\omega$. اثبت أن الاسطوانة سوف تنزلق عند نقطة التماس لفترة قدرها $\frac{v-a\omega}{3\mu g}$ تتدحرج بعدها بسرعة زاوية $\frac{2v+a\omega}{3\mu}$.

٩. وضع قضيب منتظم خشن طوله $2a$ عمودياً على حافة نضد أفقي خشن، فإذا كان مركز ثقل القضيب في البداية على بعد b إلى الخارج من الحافة وترك القضيب يتحرك من سكون حول حافة المنضدة. أثبت أن القضيب يبدأ في الانزلاق عندما يدور بزاوية مقدارها

$$\tan^{-1}\frac{\mu a^2}{a^2+gb^2}$$

حيث μ معامل الاحتكاك.

١٠. قضيب منتظم يبدأ في الحركة عندما كان طرفه ملامساً منضدة أفقية خشنة، ومائلاً بزاوية α على الرأسي، فإذا كان معامل الاحتكاك بينه وبين المنضدة هو μ. اثبت أن طرف القضيب يبدأ مباشرة في الانزلاق عندما تكون

$$\frac{3\sin 2\alpha}{2(4-\cos^2\theta)}$$

١١. قذفت كرة نصف قطرها a أعلى مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية α وبسرعة ابتدائية v وكانت الكرة تدور بسرعة زاوية ω في اتجاه الحركة إلى أعلى، فإذا كانت وبدأت حركتها الكرة بالانزلاق أعلى المستوى وبعد زمن t_1 بدأت الكرة في التدحرج وذلك عندما كان معامل الاحتكاك $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$ ، وبعد زمن t_2 توقفت الكرة عن الحركة. أثبت أن الزمن الكلي منذ بداية الحركة وحتى سكون الكرة عن الحركة هو

$$\frac{5v+2a\omega}{5g\sin\alpha}\ .$$

١٢. وضعت كرة منتظمة مصمتة على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α فإذا بدأت الكرة حركتها من سكون. أوجد الشرط اللازم لحدوث دحرجة بحتة. ثم اوجد متى يبدأ الانزلاق.

١٣. قذفت اسطوانة دائرية مصمتة على نضد أفقي خشن بسرعة خطية v_o في اتجاه عمودي على محور الاسطوانة إلى اليمين وبسرعة زاوية ω في الاتجاه المضاد لحركة عقارب الساعة. اثبت أن الاسطوانة تعود إلى الموضع الذي قذفت منه إذا كانت $a\omega > 2v_o$ ، ثم اوجد متى تبدأ الدحرجة البحتة وأن الاسطوانة تصل فعلاً إلى الموضع الذي قذفت منه قبل أن تبدأ الدحرجة البحتة إذا كان. $a\omega < 5v_o$.

١٤. كرة منتظمة نصف قطرها a تدور بسرعة زاوية ω حول قطر أفقي فيها. وضعت بهدوء على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α فإذا كانت ω في الاتجاه الذي يجعل الكرة تميل للصعود أعلى المستوى وكانت μ بين المستوى والكرة تساوي $\tan\alpha$. اثبت أن مركز الكرة يظل ساكن لمدة تساوي $\frac{2a\omega}{5g\sin\alpha}$ ثم تتدحرج الكرة بعد ذلك أسفل المستوى بعجلة منتظمة قدرها $\frac{5}{7}\sin\alpha$.

قائمة

المراجع العلمية

References

أولا: المراجع العربية :

١. أسس الميكانيكا السماوية، د. خضر حامد- جامعة الرياض-الرياض ط -١٩٨١م.

٢. الميكانيكا، صبحى رجب عطا الله - جامعة الملك سعود-الرياض - ١٤٠٨ هـ.

٣. الميكانيكا، سلامة صالح- فوزى الكومى-محمد العنانى- سلمان صبحي-مؤسسة الأنوار للنشر والتوزيع، ١٣٩٥هـ.

٤. مسائل محلولة فى الميكانيكا الهندسية، فاروق احمد البرقى- بيروت- منشورات الراتب الجامعية ١٩٨٢مـ.

٥. الميكانيكا الهندسية، تأليف ح. ل. ميرام، ترجمة أ.د. الصالح - نيويورك- دارجونوايلى١٩٨٢مـ.

٦. الميكانيكا الهندسية: ديناميكا: تأليف جوزيف ف شيللي، ترجمة أ.د. نبيل أنسى مكارى، مراجعة أ.د. سعد كامل أحمد مسعود- القاهرة- الدار الدولية ١٩٩٧مـ.

ثانياً: المراجع الأجنبية :

1. F. P. Beer, E. R. Johston, Mechanics for Engineering, Mc-Graw-hill, 1996.
2. M. A. Roderman, et al., Mechanics, Mc-Graw-hill, 1980.
3. Joseph, F. Shelley, Engineering Mechanics, Mc- Graw-hill, 1980.
4. Gupta, Kumar and Sharma, Class Mechanics: India, 2003.
5. M. Ray, A Text Book of Dynamics: India, 1986.
6. H. Goldstein, Classical Mechanics: England, 1986.
7. G. Levin and E. B. Roberts, The dynamics, Mass.: Bollinger Pub. Co., Combridge C, 1976.
8. H. R. Nara, Robart E., Vector Mechanics for engineers, Krieger publishing company, New York, (1962).
9. R. C. Hibbeler, Engineering mechanics: Dynamics, London: Prentic Hall, Singapore C, 2004.
10. H. G. Stein, Classical Mechanics, Addison-Wesley publishing Company, 1981.
11. J.P.Jenkins, Mechanics, Pergam on press: Oxford, 1979.

دليـل

المصطلحات العلمية

Terminology

(A)	
Acceleration	عجلة
Acute	حادة
Adjacent	مجاور
Amplitude	سعة
Angle	زاوية
Apse	قبا (أبس)
Apsidal	قبوية
Arbitrary	اختياري
Arbitrary constant	ثابت اختياري
Arc length	طول قوس
Area	مساحة
Areal	مساحية
Areal velocity	سرعة مساحية
Asymptotes	تقاربي
At rest	من السكون
Auxiliary	مساعدة
Auxiliary equation	معادلة مساعدة
Axes	محاور
Axis	محور
Refraction	انكسار
(B)	
Basic concepts	مفاهيم أساسية
(C)	
Cartesian	ديكارتي

Cartesian Co-ordinate	إحداثيات ديكارتية
Case	حالة
Central	مركزي
Central force	قوة مركزية
Central of gravity	مركز ثقل
Chain	سلسلة (كتينه)
Coefficient	معامل
Coefficient of friction	معامل الأحتكاك
Component	مركبه
Component of velocity	مركبة السرعة
Conditions	شروط
Co-ordinates	إحداثيات
Conservative	محافظ
Conservative flied	مجال محافظ
Constant	ثابت
Curvature	انحناء
(D)	
Damped	مخمد
Damping	تخميد
Damping coefficient	معامل تخميد
Damping force	قوة مخمدة
Depth	عمق
Derivative	اشتقاق
Differential	تفاضل
Differential equations	معادلات تفاضلية

Differential Operator	مؤثر تفاضلي
Direction	اتجاه
Displacement	إزاحة
Distance	مسافة
(E)	
Eccentricity	اختلاف مركزي
Ellipse	قطع ناقص
Energy	طاقة
Equation	معادلة
Equation of motion	معادلة حركة
Example	مثال
Exponent	أس
(F)	
Field	مجال
Flammable fuel	اشتعال الوقود
Focus	بؤرة
Free oscillation	الذبذبات
Friction	احتكاك
Fuel	وقود
(G)	
General	عام
General solution	حل عام
Generalize forces	قوى عموم
Gravity	جاذبية
Gravity of acceleration	عجلة الجاذبية

(H)	
Harmonic	توافقية
Highest	أقصى ارتفاع (أعلى)
Homogeneous	متجانس
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي
Hypotenuse	وتر المثلث القائم
(I)	
Inclined	يميل
Inclined of a horizontal	يميل على الافقي
Independent	مستقل
Inertia	قصور الذاتي
Initial	بداية
Initial velocity	سرعة ابتدائية
Initial condition	شرط ابتدائي
Intrinsic	ذاتية
Intrinsic co-ordinates	أحداثيات ذاتية
(J)	
Joule	جول
(L)	
Laplace transformation	زاوية
Law	زاوية التماس
Law of attraction	زمن الذبذبة
(M)	
Major	أكبر
Major axis	محور اكبر

Mass	كتله
Maximum speed	سرعة قصوى
Medium	وسط
Medium of a resistance	وسط مقاوم
Minor	أصغر
Minor Axis	محور اصغر
Moment	عزم
Moment of inertia	عزم قصور ذاتي
Momental ellipse	قطع ناقص القصور الذاتي
Momentum	كمية الحركة
Moon	قمر
Motion	حركة
(N)	
Non-homogeneous	غير متجانس
Non-homogeneous differential equation	معادلة تفاضلية غير متجانسة
Normal component	مركبة عمودية
(O)	
Oblique	مائل
Oblique axis	محاور مائلة
Operator	مؤثر
Orbit	مدار
Oscillation	ذبذبه
Obtuse	منفرجه
Obtuse angle	زاوية منفرجه

(P)	
Parabola	قطع مكافئ
Parallel	متوازي
Particle	جسيم
Pendulum	بندول
Periodic	دوري
Periodic time	زمن دوري
Perpendicular	عمودي
Plane	مستوى
Planet	كوكب
Polar	قطبي
Polar co-ordinates	أحداثيات قطبية
Product	ضرب
Product of inertia	حاصل ضرب القصور الذاتي
Projected	قذف
Projectilies	مقذوفات
(Q)	
Quantity	كمية
Quantum	كم
Quantum Mechanics	ميكانيكا كم
(R)	
Radius	نصف قطر
Radius of curvature	نصف قطر التقوس
Rain	مطر
Reaction	رد فعل
Real	حقيقي

Relation	علاقة
Resonance	رنين
Restriction	قيد
Restricted	مقيد
Right	قائم
Right angle	زاوية قائمة
Rigid	جاسئ (متماسك)
Rigid body	جسم جاسئ
Rocket	صاروخ
Rolling	تدحرجة
Root	جذر
Roots of equation	جذور المعادلة
Rotation	دوران
Rotation of rectangular axes	دوران المحاور المتعامدة
(S)	
Simple	بسيط
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Sliding	أنزلاق
Small	صغيرة
Small oscillation	ذبذبات صغيرة
Smooth	أملس
Solid angle	زاوية مجسمة
space	فراغ
Spherical	كروي
Spherical co-ordinate	إحداثيات كروية

Start of flammable fuel	بداية اشتعال الوقود
Straight	مستقيم
Straight line	خط مستقيم
Symmetric	تماثل
Symmetric axis	محور تماثل
(T)	
Tangent	مماس
Tangential	مماسية
Tangential component	مركبة مماسية
Tension	شد
Theorem	نظرية
Theorem of parallel axes	نظرية المحاور المتوازية
Time	زمن
Trigonometric	مثلثية
Trigonometric functions	دوال مثلثية
Trajectory	مسار
Transform	تحويل
Translation	انتقال
Translation motion	حركة انتقالية
Transverse	مستعرضه
Transverse component	مركبة مستعرضه
(U)	
Unknowns	مجاهيل
Unknown variable	متغير مجهول

(V)	
Variable	متغير
Vector	متجه
Velocity	سرعة
Vertex	رأس
(W)	
Wight	وزن
Work	شغل
Work done	شغل مبذول


الديناميكا
Bibliotheca Alexandrina
1237189